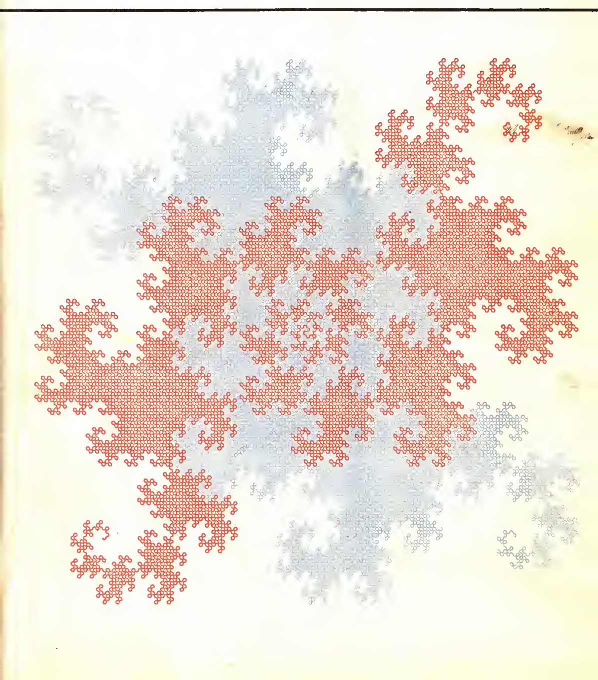
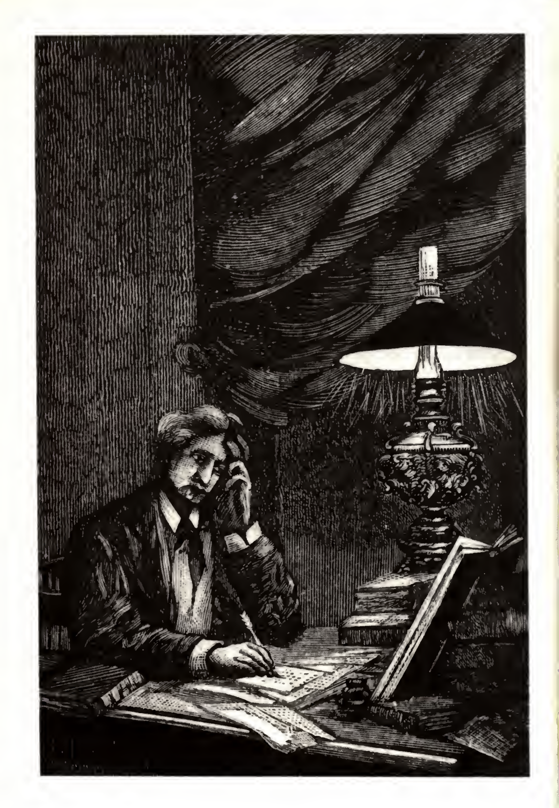
Квант

1976
11

Научно-популярный физико-математический журнал



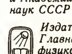


Основан в 1970 году

1976
11

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

«Леверье, открывающий Нептун» — так названа в книге К. Фламариона гравюра, которую мы воспроизводим на второй странице обложки. Недавно издательство «Наука» выпустило книгу Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова «Поиски и открытия планет». Рецензию на эту книгу мы помещаем на с. 70.

А. Дозоров

Электрические мультиполи

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом в какой-нибудь точке окружающего пространства, обратно пропорционален расстоянию от заряда до этой точки (смотри приложение в конце статьи). Казалось бы, что и любое множество зарядов, сосредоточенных в некоторой области, вдали от этой области будет создавать потенциал, обратно пропорциональный расстоянию. Однако такое заключение в общем случае неверно. Оказывается, что, располагая заряды в определенном порядке, можно получить потенциал, обратно пропорциональный любой целой степени расстояния.

Для того чтобы убедиться в этом необычном свойстве, нам потребуется лишь одно математическое утверждение: если величина $|x|$ меньше единицы, то справедливо соотношение

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad (1)$$

Это — хорошо знакомое вам выражение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Перейдем к рассмотрению различных систем электрических зарядов. На расстоянии r от точечного заряда q величина потенциала φ, создаваемого этим зарядом, обратно пропорциональна расстоянию: $\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r}$. Коэффициент пропорциональности k зависит от выбора системы единиц. В СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Нам будет удобнее выбрать систему единиц, в которой $k = 1$ (система СГСЭ). Кроме того, будем считать, что все заряды находятся в вакууме, то есть $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим, например, три заряда, расположенные на одной прямой на некотором расстоянии друг от друга (рис. 1). Пусть $AB = a$, $AC = b$, а величины зарядов равны q, nq и mq, где n и m — некоторые числа. Найдем потенциал в точке D, лежащей на продолжении отрезка AC на расстоянии r от точки A и находящейся достаточно далеко от всех трех зарядов. Математически последнее условие можно записать в виде $r \gg a + b$. Согласно принципу суперпозиции электрических полей потенциал φ в точке D равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{nq}{r-a} + \frac{mq}{r-b} = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{n}{1-\frac{a}{r}} + \frac{m}{1-\frac{b}{r}}\right).$$

Так как нас интересует лишь случай $r \gg a + b$, то можно воспользоваться соотношением (1). При этом получим

$$\varphi = \frac{q}{r}\left[1 + n\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3} + \ldots\right) + m\left(1 + \frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2} + \frac{b^3}{r^3} + \ldots\right)\right] = \frac{q + nq + mq}{r} + q\frac{na + mb}{r^2} + q\frac{na^2 + mb^2}{r^3} + q\frac{na^3 + mb^3}{r^4} + \ldots \qquad (2)$$

Из этого выражения видно, что для больших расстояний r абсолютная величина каждого последующего слагаемого значительно меньше, чем предыдущего, если только числитель предыдущего слагаемого не равен нулю. Например, если сумма зарядов не

равна нулю ($q + nq + mq \neq 0$), то основную роль в формуле (2) будет играть первое слагаемое, и потенциал поля системы зарядов будет обратно пропорционален первой степени расстояния. Если сумма зарядов равна нулю (система в целом нейтральна), то основную роль играет второе слагаемое: потенциал обратно пропорционален квадрату расстояния от зарядов до точки наблюдения. Но можно выбрать и такое расположение зарядов, при котором и первое, и второе слагаемые будут равны нулю. Из формулы (2) видно, что для этого необходимо выполнение двух условий:

$$q + nq + mq = 0 \qquad (3а)$$

и

$$q\,(na + mb) = 0. \qquad (3б)$$

Условие (3а) говорит о том, что полный заряд системы равен нулю, то есть заряды не могут быть одного знака. Сокращая в (3а) и (3б) произвольный заряд q, получим два уравнения с четырьмя параметрами n, m, a, b. Это означает, что можно выбрать бесконечное число вариантов расположения и величин зарядов, удовлетворяющих уравнениям (3). Выберем два параметра, например характеризующие расположение зарядов, по своему желанию. Пусть $b = 2a$, то есть $AB = BC$. В этом случае из уравнений (3а) и (3б) получим $n = -2$, $m = 1$, то есть в точке A (см. рис. 1) находится заряд q, в точке B — заряд $-2q$, а в точке C — заряд q, $AB = BC = a$. Такая система зарядов на больших расстояниях создает поле, потенциал которого (см. формулу (2))

$$\varphi = \frac{2\,qa^2}{r^3} + \frac{6\,qa^3}{r^4} + \ldots$$

Основную роль играет здесь первое слагаемое, то есть потенциал обратно пропорционален третьей степени расстояния.

Если потребовать, чтобы наряду с условиями (3а) и (3б) выполнялось также условие

$$na^2 + mb^2 = 0, \qquad (3в)$$

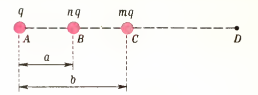


Рис. 1.

то, как это следует из формулы (2), потенциал будет пропорционален r^{-4}. Однако система уравнений (3а)—(3в) не имеет решений. Действительно, умножим уравнение (3б) на a и сравним полученное уравнение с (3в). Получим $a = b$, после чего (3б) превращается в уравнение $n + m = 0$, а (3а) приводит к противоречию $1 = 0$ (если только $q \neq 0$, а случай $q = 0$ не представляет физического интереса). Аналогичный результат мы получим и для всех остальных членов в формуле (2).

Таким образом, три заряда, изображенные на рисунке 1, могут в зависимости от их величин и взаимного расположения создавать на больших расстояниях поля, потенциалы которых будут пропорциональны $1/r$, $1/r^2$ или $1/r^3$.

Аналогичным образом можно рассмотреть поле любой системы зарядов. Кроме того, можно указать изящный метод построения системы зарядов, создающих на больших расстояниях поле с потенциалом

$$\varphi_n = \frac{C_n}{r^{n+1}}, \qquad (4)$$

где n — целое число, C_n — некоторая постоянная, зависящая от величин зарядов и их взаимного расположения. Система зарядов, создающая поле с потенциалом (4), называется электрическим мультиполем n-го порядка или 2^n-полем. Простейший случай $n = 0$ — мультиполь нулевого порядка — соответствует точечному заряду. В общем случае мультиполь n-го порядка содержит 2^n зарядов. Так вот, если имеется мультиполь n-го порядка (2^n-поль), то из него легко построить мультиполь $(n + 1)$-го порядка. Для этого нужно

к прежнему 2^n-полю добавить такой же 2^n-поль, но только симметрично сдвинутый на некоторое расстояние и к тому же с противоположными по знаку зарядами. Получится система, состоящая, как принято говорить, из двух противоположных 2^n-полей. Эта новая система образует мультиполь $(n+1)$-го порядка (2^{n+1}-поль).

Рассмотрим несколько примеров.

Точечный заряд $-q$ — мультиполь нулевого порядка. Образуем из него мультиполь первого порядка (2-поль), который принято называть диполем. Сдвинем точечный заряд $-q$ на расстояние l и изменим знак заряда. При этом получим диполь, изображенный на рисунке 2. Его принято характеризовать так называемым дипольным моментом $\mathbf{d} = q\mathbf{l}$; вектор $\mathbf{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному, а его длина равна расстоянию между зарядами.

Вычислим потенциал φ_1, создаваемый полем диполя в удаленной точке D, лежащей на продолжении линии, соединяющей заряды ($AD = r \gg l$):

$$\varphi_1 = \frac{-q}{r} + \frac{q}{r-l} = \frac{q}{r}\left(-1 + \frac{1}{1-\frac{l}{r}}\right).$$

Применяя соотношение (1), получим главную часть потенциала, создаваемого диполем:

$$\varphi_{\text{вн}} = \frac{ql}{r^2} = \frac{d}{r^2}. \qquad (5)$$

Если точка наблюдения не лежит на линии, соединяющей заряды, то ее положение можно охарактеризовать двумя координатами: расстоянием до одного из зарядов и, например, углом между дипольным моментом и радиусом-вектором, проведенным от положительного*) заряда в точку наблюдения.

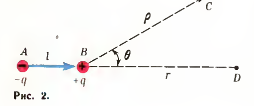


Рис. 2.

На рисунке 2 точка C характеризуется координатами $\rho = BC$ и углом θ. В этом случае расчет потенциала несколько усложняется. Приведем лишь результат:

$$\varphi_1 = \frac{d\cos\theta}{\rho^2}. \qquad (5а)$$

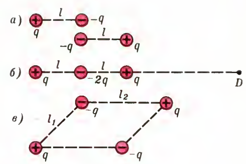


Рис. 3.

Чтобы из диполя — мультиполя первого порядка — образовать мультиполь второго порядка (2^2-поль, чаще его называют квадруполем), надо к прежнему диполю добавить такой же диполь, смещенный на некоторое расстояние и изменить в нем знаки зарядов на противоположные. Сделаем это так, как показано на рисунке 3, *а*: сместим диполь на величину его длины l. (Смещение можно выполнить и на меньшее расстояние. В этом случае расчеты будут несколько длиннее.)

Если заряды мультиполя расположены на одной оси, то мультиполь называют аксиальным. На рисунке 3, *б* изображен аксиальный квадруполь, получающийся из системы зарядов рисунка 3, *а*, а на рисунке 3, *в* общий случай квадруполя — заряды равной величины и противоположных знаков симметрично расположены в вершинах параллелограмма. Потенциал квадруполя φ_2,

*) В силу того, что $r \gg l$, результат не изменится, если радиус-вектор провести от отрицательного заряда.

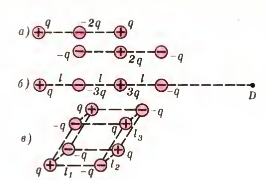


Рис. 4.

согласно формуле (4), должен быть пропорционален $1/r^3$. Следовательно, в разложении (1) достаточно учесть члены суммы лишь до x^2.

Определим коэффициент пропорциональности C_2 для аксиального квадруполя, изображенного на рисунке 3, *б*. Расчет выполним для удаленной точки D, лежащей на оси квадруполя:

$$\varphi_2 = \frac{q}{r} + \frac{(-2q)}{r-l} + \frac{q}{r-2l} \approx$$

$$\approx \frac{q}{r}\left[1 - 2\left(1 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{2l}{r} + \frac{4l^2}{r^2}\right)\right] = \frac{2ql^2}{r^3}.$$

Образуем теперь мультиполь третьего порядка, называемый обычно октуполем, так как в общем случае в него входит 8 одинаковых по величине зарядов. Для этого дополним аксиальный квадруполь (рис. 3, *б*) симметричным аксиальным квадруполем так, как показано на рисунке 4, *а*. При этом получим аксиальный октуполь (рис. 4, *б*). В общем случае из квадруполя (рис. 3, *в*) получается октуполь, изображенный на рисунке 4, *в*, заряды которого расположены в вершинах параллелепипеда. Потенциал электростатического поля октуполя φ_3, согласно формуле (4), должен быть пропорционален $1/r^4$. Определим потенциал, создаваемый полем аксиального октуполя в точке D:

$$\varphi_3 = \frac{q}{r} + \frac{(-3q)}{r-l} + \frac{3q}{r-2l} + \frac{(-q)}{r-3l} \approx$$

$$\approx \frac{q}{r}\left[1 - 3\left(1 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^3}{r^3}\right) + 3\left(1 + \frac{2l}{r} + \frac{4l^2}{r^2} + \frac{8l^3}{r^3}\right) - \left(1 + \frac{3l}{r} + \frac{9l^2}{r^2} + \frac{27l^3}{r^3}\right)\right] = -\frac{6ql^3}{r^4}.$$

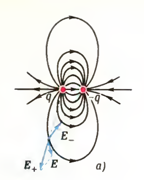
Аналогичным образом вычисляются поля мультиполей более высоких порядков.

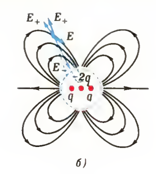
Вдали от любой системы электрических зарядов поле этой системы можно представить как результат сложения полей мультиполей различных порядков. Чем выше порядок мультиполя, соответствующего рассматриваемой системе зарядов, тем в целом нейтральнее система, тем быстрее уменьшается поле при удалении от зарядов.

Мы рассмотрели потенциалы электростатических полей, создаваемых аксиальными мультиполями на их оси. Вычисление потенциала в произвольной точке пространства производится таким же образом, но расчеты становятся более громоздкими. Если известен вид потенциала мультиполя $\varphi_n = C_n/r^{n+1}$, то однозначно определяется значение напряженности электрического поля E, а следовательно, и силы $F = qE$, действующей со стороны мультиполя на заряд q (смотри § 76 в учебном пособии «Физика-9»). Если $n \geqslant 0$ (что верно для любого мультиполя), то

$$E \sim \frac{1}{r^{n+2}}. \qquad (6)$$

Опуская математические подробности, рассмотрим картины силовых линий диполя и аксиального квадруполя, представленные на рисунках 5, *а* и 5, *б*. На рисунке 5, *а* изображено поле диполя. Полная напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в каждой точке получается путем геометрического сложения поля положительного заряда $\mathbf{E}_+$ с полем отрицательного заряда $\mathbf{E}_-$: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$.





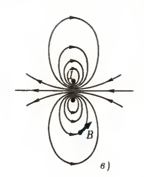


Рис. 5.

На рисунке эти векторы показаны в одной из точек пространства. Аналогичная картина изображена на рисунке 5, *б* для аксиального квадруполя. В каждой точке пространства полное поле **E** есть результат суммирования трех векторов: двух векторов напряженности $\mathbf{E}_+$ полей, созданных положительными зарядами, и одного вектора напряженности $\mathbf{E}_-$ поля, созданного отрицательным зарядом, величина которого равна сумме положительных зарядов. Полная картина распределения силовых линий электрического поля в пространстве для диполя и квадруполя получится, если рисунки 5 вращать вокруг соответствующих осей симметрии.

Кроме электрических можно рассматривать также и магнитные мультиполи — системы, состоящие из магнитов или замкнутых токов. Единственное отличие состоит в том, что отдельные магнитные заряды до сих пор не обнаружены, поэтому рассмотрение надо начинать сразу с магнитного диполя. На рисунке 5, *в* показаны линии индукции магнитного диполя, образованного круговым током *I*, плоскость которого перпендикулярна плоскости рисунка. На больших расстояниях от диполей рисунки 5, *а* и 5, *в* имеют одинаковый вид.

Сходство магнитного диполя с электрическим можно проиллюстрировать еще одним примером. Магнитная стрелка компаса — магнитный диполь — ориентируется вдоль линий магнитной индукции. Аналогично в электрическом поле ведет себя и электрический диполь: он также устанавливается вдоль силовых линий, то есть является своеобразным «электрическим компасом» (рис. 6).

Примерами электрических мультиполей могут служить атомы и молекулы. Если при образовании молекулы в результате перераспределения электронов между атомами центры распределения положительных и отрицательных зарядов в ней не совпадают, то молекула обладает собственным дипольным моментом и называется полярной. Молекулы соляной кислоты и воды — полярные (рис. 7). Если в молекуле положительные и отрицательные заряды раздвинуты на расстояние порядка радиуса атома водорода ($l = 0{,}5 \times \times 10^{-8}$ *см*), то дипольный момент молекулы должен быть порядка $d = el$ *), то есть $d \approx 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ *см* × ед. заряда СГСЭ. По порядку величины это согласуется с опытными данными, приведенными на рисунке 7. Если же молекула состоит из одинаковых атомов (O_2, H_2, Cl_2), то электроны, образно говоря, «не знают», какой атом выбрать и располагаются в молекуле более равномерно, что приводит к нулевому значе-

*) Заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

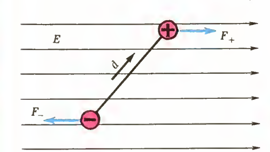
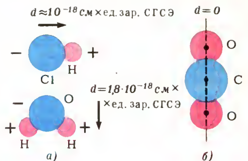


Рис. 6.



Рнс. 7.

нию дипольиого момеита молекулы. Такие молекулы называют неполярными. На рисуике 7 показаиа линейиая молекула углекислого газа CO_2, являющаяся неполярной. Даже «виешний вид» этой молекулы наталкивает на предположеиие, что перераспределеиие электроиов между атомами должио образовать из иее аксиальиый квадруполь (сравните с рисуиком 3, *б*), а электрическое поле, создаваемое молекулой углекислого газа, должно иметь вид, представленный иа рисунке 5, *б*.

Более сложное распределеиие атомов и электроиов в молекулах приводит к образоваиию мультиполей высших порядков.

Прнложенне. Вычнсленне потенцнала электрнческого поля, созданного точечным зарядом

В учебном пособни «Фнзнка-9» формулы для потенцнала поля, созданного точечным зарядом, прнведены без вывода (смотрн формулы (8.28) н (8.29) на стр. 144). Прнведем простой вывод этнх формул для вакуума.

Если точечный заряд q находнтся в точке O (рнс. 8), то потенцнал φ созданного нм поля в точке N на расстояннн r от заряда q равен работе A, которую совершило бы электрнческое поле прн перемещении еднннчного положнтельного заряда из точки N в бесконечно удаленную точку, в которой $\varphi=0$. Так как работа перемещения не завнсит от формы траекторнн, по которой перемещается заряд, будем счнтать, что еднннчный заряд перемещается вдоль сnловой лнннн.

Подсчнтаем, чему же равна эта работа? Для этого разобьем весь путь, пройденный еднннчным положительным зарядом, на очень малые участки NN_1, N_1N_2, N_2N_3 н т. д. (см. рнс. 8). На каждом нз этнх участков вычнслнм работу перемещения единичного заряда. Сумма этнх работ н равна потенцналу поля в точке N по отношенню к бесконечностн.

Вычнслнм работу A_1 перемещения еднннчного заряда нз точки N в точку N_1, отстоящую от N на очень малое расстоянне (r_1-r). Как показано в учебном пособни «Фнзнка-9» (см. формулу (8.20)), в однородном электрическом поле напряженностью E работа по перемещенню единичного заряда чнсленно равна

$$A = E\,(r_1 - r). \qquad (1)$$

Поле точечного заряда, конечно, не является однородным. Его напряженность в точке N равна $E_N = \frac{q}{r^2}$, а в точке $N_1 E_{N_1} = \frac{q}{r_1^2}$.

Какое же значенне E мы должны подставнть в формулу (1)? Очевидно, надо прннять такое значение напряженности поля, которое было бы средннм между этнми двумя значеннямн. Так как r и r_1 мало отличаются друг от друга, то вместо r^2 и r_1^2 в выраженнях для напряженностей E_N и E_{N_1} можно взять пронзведенне rr_1, которое немного больше, чем $r^2=rr$, н немного меньше, чем $r_1^2=r_1r_1$. Тогда можно считать, что на всем протяженни участка NN_1 напряженность поля определяется формулой

$$E_{NN_1} = \frac{q}{rr_1}.$$

Прн этом работа A_1 будет чнсленно равна

$$A_1 = \frac{q}{rr_1}(r_1 - r),$$

или

$$A_1 = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}.$$

Точно так же можно вычнслить работу перемещення еднннчного заряда из точкн N_1 в

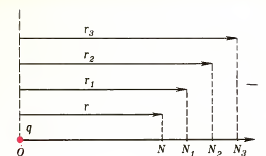


Рис. 8.

точку N_2, находящуюся на расстоянии r_2 от источника поля:

$$A_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}.$$

Работа перемещения единичного заряда из точки N в точку N_2 равна сумме найденных двух работ:

$$A_1 + A_2 = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_2}.$$

Повторив эти рассуждения, мы получим, что работа перемещения единичного заряда из той же точки N в точку N_3, отстоящую от источника поля на расстояние r_3, численно равна

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_3}.$$

Таким образом, работа перемещения единичного заряда из одной точки поля точечного заряда q в любую другую точку зависит только от расстояний этих точек до заряда q. Работа же перемещения единичного положительного заряда из точки N в бесконечность может быть найдена так:

$$A = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_\infty}.$$

Но

$$\frac{q}{r_\infty} = 0.$$

Следовательно,

$$A = \varphi = \frac{q}{r}.$$

В случае, если диэлектрическая проницаемость среды отлична от единицы,

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Для тех, кто знаком хотя бы с интегралами от простейших функций, вывод этой формулы становится намного более простым:

$$\varphi = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2}\,dr = \frac{q}{\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Так как в СИ напряженность поля точечного заряда q равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, то потенциал, рассчитанный аналогичным методом, будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Упражнения

1. Нарисуйте аксиальный квадруполь, состоящий из четырех зарядов, и вычислите потенциал на оси в удаленной точке.
2. Нарисуйте аксиальный мультиполь четвертого порядка и найдите потенциал на оси.

Приложение подготовлено редакцией

Задачи наших читателей

1. Доказать, что из любого множества 10^n натуральных чисел можно выкинуть одно число, а оставшиеся разбить на подмножества по 3 числа в каждом так, что сумма чисел в каждом подмножестве даст при делении на 3 остаток 0 или 1.

А. Верховод
(г. Алма-Ата)

2. Доказать неравенства:

а) $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} > \left|\frac{c}{b} - \frac{c}{a}\right| \times \sqrt{ab}$, где $0 < c < a$, $c < b$;

б) $\Sigma_{i=1}^{k} [a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}]^{1/n} \leqslant [\Pi_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{kj})]^{1/n}$, где $a_{ij} \geqslant 0$;

в) $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)\cdot\sqrt{ab} < \sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leqslant 2\sqrt{ab}$, где $0 < c < a$, $c < b$.

С. Берколайко
(с. Котово Старооскольского р-на)

Л. Цинман

«Парадокс исследователя»

При доказательстве утверждений методом математической индукции иногда возникает необычная ситуация. Проиллюстрируем ее на двух примерах.

Пример 1

Докажем методом математической индукции, что для всех натуральных n справедливо следующее утверждение: *сумма кубов первых n натуральных чисел есть квадрат некоторого натурального числа.*

Обозначим это утверждение через $A(n)$. Доказательства методом математической индукции проводятся, как известно, в два этапа.

а) Базис индукции: $A(1)$. Убеждаемся в справедливости $A(1)$:

$$1^3 = 1^2.$$

б) Индукционный шаг: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Предположим, что для некоторого натурального числа k справедливо утверждение $A(k)$, и докажем, что тогда справедливо и $A(k+1)$. Итак, пусть нашлось такое натуральное число p, для которого

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = p^2. \quad (1)$$

Докажем, что тогда существует такое натуральное число q, для которого

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = q^2. \quad (2)$$

Из (2) и (1) следует, что нам надо доказать существование такого q, для которого

$$(k+1)^3 = q^2 - p^2. \quad (3)$$

Но как это можно было бы доказать? Естественного пути доказательства не видно.

Итак, попытка доказать наше утверждение непосредственным применением метода математической индукции натолкнулась на трудности при проведении индукционного шага.

Вернемся снова к рассмотрению $A(n)$ и проверим его справедливость для нескольких начальных значений n:

$$1^3=1^2;$$
$$1^3+2^3=3^2;$$
$$1^3+2^3+3^3=6^2;$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2;$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2.$$

Присмотревшись к этим равенствам, приходим к гипотезе: для всех натуральных n справедливо утверждение: *сумма кубов первых n натуральных чисел есть квадрат натурального числа, равного сумме этих чисел.*

Обозначим это утверждение через $B(n)$. Конечно, $B(n)$ несет в себе больше информации, чем $A(n)$, и потому его естественно считать более сильным утверждением. Доказав $B(n)$, мы получим справедливость $A(n)$ в качестве очевидного следствия.

Попробуем теперь применить метод математической индукции к доказательству усиленного утверждения.

а) Справедливость $B(1)$ фактически уже установлена:

$$1^3 = 1^2.$$

б) Допустим, что для некоторого натурального числа k справедливо $B(k)$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2. \quad (4)$$

Докажем, что тогда справедливо и $B(k+1)$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + k + 1)^2. \quad (5)$$

Используя равенство (4), можно свести доказательство равенства (5) к доказательству равенства

$$(k+1)^3 = (1+2+\ldots+k+k+1)^2 - (1+2+\ldots+k)^2. \quad (6)$$

Преобразуем правую часть равенства (6):

$$(1+2+\ldots+k+k+1)^2-(1+2+\ldots+k)^2 = \left[\frac{(k+2)(k+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(k+1)k}{2}\right]^2 = (k+1)^3.$$

Итак, равенство (6) установлено. Тем самым для всех n доказано $B(n)$, а значит, и $A(n)$.

Пример 2 *)

Однажды учитель задал ученикам на дом такую задачу: доказать, пользуясь методом математической индукции, что для любого натурального числа n верно неравенство $A(n)$:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Коля В., садясь дома за доказательство этого неравенства, случайно переписал условие неравенства с ошибкой, добавив в знаменателе 1. Таким образом, он принялся за доказательство более сильного неравенства $B(n)$:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Вот его доказательство.

а) Убеждаемся в справедливости $B(1)$:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) Покажем, что из справедливости $B(k)$ для некоторого натурального k

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (7)$$

следует справедливость этого неравенства и для $k+1$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{k+2}}. \quad (8)$$

Для этого достаточно показать справедливость неравенства, полученного почленным делением неравенства (8) на неравенство (7):

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}.$$

После равносильных преобразований получаем очевидное неравенство: $3k+2>0$. Итак, $B(n)$ доказано для любого натурального n.

В школе Колю вызвали к доске для доказательства домашнего неравенства $A(n)$. Только теперь он увидел, что доказывал дома неравенство, более сильное, чем требуемое. Конечно, он мог воспроизвести на доске доказательство неравенства $B(n)$, а справедливость $A(n)$ получить затем в качестве очевидного следствия. Но Коля решил применить свой способ доказательства прямо к $A(n)$.

а) Убеждаемся, что $A(1)$ справедливо:

$$\frac{1}{2} < 1.$$

б) Покажем, что из справедливости $A(k)$ для некоторого натурального k

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

следует справедливость этого неравенства и для $k+1$:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}. \quad (9)$$

Но неравенство (9) равносильно неверному неравенству $k+1<0$.

*) «Квант», 1970, № 7, с. 37 и № 12, с. 58.

Получился абсурд. Более сильное неравенство оказалось и более легким для доказательства.

«Парадокс исследователя»

Итак, в обоих примерах при использовании метода математической индукции мы столкнулись с тем, что приходится доказывать утверждение более сильное, чем это нужно на самом деле.

Эту необычную ситуацию известный американский математик Д. Пойа в своей популярной книге «Как решать задачу» назвал «inventor's paradox» («парадокс исследователя» или «парадокс изобретателя»).

Возникает вопрос: действительно ли существуют такие парадоксальные ситуации? Быть может, в обоих приведенных примерах, потрудившись еще немного, мы бы нашли доказательство интересующего нас утверждения, не прибегая к рассмотрению более сильного утверждения?

Конечно, прежде чем искать ответ на этот вопрос, нужно более точно описать, в чем заключается парадоксальность ситуации.

Предлагается такое определение: два утверждения $A(n)$ и $B(n)$ назовем *парадоксальной парой*, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. $A(n)$ является очевидным следствием $B(n)$;

2. $A(1)$, $B(1)$, $B(k) \Rightarrow B(k+1)$ могут быть доказаны без использования метода математической индукции;

3. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ нельзя доказать без использования этого метода.

Теперь поставленный вопрос можно сформулировать так: *существуют ли парадоксальные пары?*

Действительно, пусть два утверждения $A(n)$ и $B(n)$ составляют парадоксальную пару и нам требуется доказать справедливость утверждения $A(n)$ для всякого n. Если мы попробуем применить метод математической индукции непосредственно к $A(n)$, то наткнемся на трудности: при проведении индукционного шага нам предстоит по крайней мере еще раз обратиться к этому методу (см. пункт 3 определения). В то же время, прибегнув к помощи $B(n)$, мы быстро достигнем цели: сначала методом математической индукции устанавливаем справедливость $B(n)$ (см. пункт 2 определения), а затем из $B(n)$ выводим $A(n)$ (см. пункт 1 определения).

Итак, существуют ли парадоксальные пары?

Что такое доказательство?

Давайте теперь подумаем, можем ли мы в принципе про какую-нибудь пару конкретных утверждений $A(n)$, $B(n)$ доказать, что они образуют парадоксальную пару. Главную трудность представляет пункт 3 определения. Каким образом можно было бы убедиться, что для некоторого утверждения не существует доказательства, обладающего требуемым свойством? Чтобы установить, что доказательства не существует, по-видимому, надо знать, что такое *доказательство*. Нельзя же показать, что «нет того, не знаю чего».

Итак, что же такое «доказательство»? И тут нам неожиданно приходится констатировать, что мы этого не знаем, что у нас нет никакого определения для этого важнейшего понятия. В математике, строящейся в том виде, к которому мы привыкли, с понятием доказательства оперируют на интуитивном уровне: *доказательство — это рассуждение, которое убеждает*. Пока математикам приходилось решать только вопросы типа, является ли то или иное предъявленное рассуждение *доказательством*, этого интуитивного уровня хватало. Однако его принципиально не хватает, когда надо доказать, что некото-

рого *доказательства* не сущеествует вообще.

Здесь искушенный читатель, возможно, захочет возразить. Позвольте, скажет он, а как же, например, удается показать, что некоторая геометрическая задача на построение не может быть решена с помощью циркуля и линейки? В чем же разница?

А разница в том, что в задачах на построение речь идет не о построениях *вообще*, а о построениях *только с помощью циркуля и линейки*. Таким образом, мы точно формулируем средства, которые собираемся использовать для решения. А в таком случае появляется возможность как-то описать класс задач, которые решаются этими средствами. Поэтому, когда нам предлагают конкретную задачу на построение, мы можем попытаться установить, принадлежит она этому классу или нет.

На рубеже XIX и XX веков был предложен такой способ построения математики, который позволял определить понятие доказательства вполне точно. Различные разделы математики строятся при этом способе в виде *формальных систем.*

Здесь мы не будем пытаться точно объяснить, что такое формальная система. Скажем только, что в формальных системах содержательные математические утверждения записываются в виде *формул*, которые строятся по точным правилам. Формула называется *доказуемой*, если она может быть выведена из *аксиом* (аксиомы — это заранее фиксированные исходные формулы) за конечное число шагов с помощью фиксированных заранее *правил вывода*. Это и есть упомянутое уточнение понятия доказательства.

Изучением формальных систем занимается математическая логика *). В этой статье не место писать о ней. Подчеркнем только, что решение вопроса о парадоксальных парах, а также многих других более важных вопросов (например, о непротиворечивости того или иного раздела математики или о независимости некоторой аксиомы) зачастую возможно лишь после предварительной формализации.

*) Школьнику, желающему познакомиться с математической логикой, мы рекомендуем книги Р. Р. Столла «Множества. Логика. Аксиоматические теории» (М., «Просвещение», 1968), Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» (М., «Наука», 1971) и П. С. Новикова «Элементы математической логики» (М., «Наука», 1973).

Теорема

В рамках арифметики натуральных чисел, заданной в виде формальной системы, можно ответить на поставленный выше вопрос. Существует несколько — по существу, равносильных — формальных арифметических систем. Пусть S — одна из этих систем. Автором статьи получен следующий результат.

Теорема. *В системе S имеются парадоксальные пары.*

В пункте 1 определения парадоксальной пары требуется, чтобы $A(n)$ было *очевидным следствием* $B(n)$. Понятие очевидного следствия, естественно, тоже требует уточнения. В доказательстве сформулированной теоремы некоторая конкретная конъюнкция $B(n)$ образует парадоксальную пару с любым ее членом.

Конъюнкция нескольких утверждений соответствует сложно-сочиненному предложению, составленному из этих утверждений с помощью союза «и». Таким образом, конъюнкция нескольких утверждений справедлива тогда и только тогда, когда справедливо каждое из этих утверждений. Поэтому естественно считать, что каждый член конъюнкции является ее очевидным следствием.

Сформулированная теорема показывает, что в формальной арифметической системе действительно можно столкнуться с «парадоксом исследователя». Это надо учитывать и при содержательных рассуждениях, использующих метод математической индукции.

Я. Смородинский

Сверхтяжелые элементы — открытие или ошибка?

В середине июня 1976 года в газетах разных стран появились сообщения о том, что группа американских ученых, в которую входили физики, химики и геологи, обнаружила в микроскопических кристаллах монацита следы сверхтяжелых элементов, которые должны стоять в таблице Менделеева на 116, 124 и 126 местах! Корреспонденты ссылались на выступление Поля Дирака, одного из создателей квантовой механики, во время научной конференции. 5 июля в американском журнале «Physical Review Letters» появилась научная статья об этом открытии.

Но можно ли верить сразу этому сообщению? Ведь безуспешные поиски сверхтяжелых элементов ведутся давно, и надо очень тщательно проверить всевозможные интерпретации полученных результатов, чтобы наступила полная уверенность в подлинности открытия.

История, которая разворачивается сейчас на наших глазах, очень хорошо иллюстрирует, как трудно доказать достоверность научного открытия, которое сделано на самой границе чувствительности современной физической аппаратуры.

Пройдет еще некоторое время, пока можно будет окончательно ответить на вопрос «открытие или ошибка?». Сейчас же мы можем лишь рассказать о том, в чем состоит сама проблема и что позволило экспериментаторам заподозрить существование новых элементов в их образцах породы.

Конец таблицы Менделеева

В таблице Менделеева в клетке под номером 92 стоит последний элемент, который можно найти в природе — уран.

Физики получили в лабораториях много новых элементов — список их теперь простирается более чем на 10 клеток дальше урана. Элементы 93 (нептуний) и 94 (плутоний), которые получаются из урана после захвата нейтрона и последующего β-распада, были получены в первые годы развития атомной энергетики. Последующие элементы получались либо после многократных захватов нейтронов образцами, помещенными в атомные реакторы, либо при бомбардировке тяжелых элементов более легкими ядрами при помощи ускорителей. Физики надеются, что в ближайшие годы можно будет даже посмотреть, что произойдет, когда столкнутся два ядра урана.

Почему же обрывается таблица Менделеева? В тяжелых ядрах слишком велик электрический заряд, в них слишком много протонов. Электрические силы отталкивания так велики, что ядро самопроизвольно делится. Конечно, между всеми частицами ядра действуют ядерные силы, которые удерживают их от разлета, но все же у ядер с большим числом протонов электрическое отталкивание оказывается сильнее.

«Магические числа»

Давно было обнаружено, что когда число нейтронов или протонов в ядре оказывается равным одному из так называемых «магических» чисел, например, 20, 56, 82, то такие ядра оказываются более устойчивыми, чем их соседи. Из теоретических соображе-

ний следовало, что «магическими» должны быть и числа 114 и 126. Поэтому некоторые ученые считали возможным существование очень устойчивых ядер с такими зарядами, несмотря на то, что ядра с меньшими зарядами распадаются очень быстро.

Конечно, устойчивость таких ядер не абсолютная, как, например, у ядер железа или золота. Но если физикам повезет и время жизни таких ядер окажется порядка миллиарда лет, их можно даже поискать в природе, например, в каких-нибудь старых минералах.

Но как они могли бы туда попасть?

Наши взгляды на происхождение элементов связаны с представлением о постепенном возникновении все более и более тяжелых элементов в результате захвата нейтронов. Такие процессы происходили на раннем этапе развития Вселенной и, может быть, происходят и сейчас в ядрах галактик и в недрах звезд. Но последовательный захват нейтронов не может превратить ядро урана в сверхтяжелое ядро с зарядом 114 или 126 — таким путем нельзя перескочить через область элементов с порядковыми номерами 100—110, нельзя навести мост между «материком» обычных ядер и «островом стабильности». Если, тем не менее, ядра с острова стабильности будут обнаружены, то вопрос о том, как возник такой остров, станет весьма актуальным.

Эксперимент

Именно поэтому существование сверхтяжелых элементов в природе встречает скептическое отношение со стороны многих ученых. Однако, никто не может доказать, что их в природе нет. Нужны опыты.

В опытах, о которых говорилось вначале, сверхтяжелые элементы искали в очень старых образцах слюды, содержащих включения микрокристаллов монацита. В этих микрокристаллах находились ядра радиоактивных тория и урана. Альфа-частицы, вылетающие из этих ядер, застревали в слюде, создавая сферические гало (темные сферы), проходящие через места, где они нанесли атомам слюды наибольшие повреждения. Некоторые гало имели радиус больший, чем обычно, что указывало на вылет альфа-частиц большой энергии (до 14 миллионов электрон-вольт). В этих местах и были предприняты поиски новых элементов.

В циклотроне создавался очень тонкий пучок протонов с энергией 4,7—5,7 миллионов электрон-вольт, диаметром $\sim$ 30 *мкм*. Этим пучком обстреливалось место, где надеялись обнаружить атомы сверхтяжелых элементов — центр гало. Протоны должны выбивать из внутренних оболочек этих атомов электроны. При этом на освободившиеся места переходили бы электроны более дальних от ядра слоев, излучая рентгеновские лучи. Зная энергию рентгеновских лучей, можно было вычислить заряд ядра.

Полученные таким путем рентгеновские лучи указывали на присутствие в образцах элементов 116*) и 126 (и менее четко 124). Но интенсивность рентгеновских лучей была крайне невелика, и необходимы новые еще более точные опыты, «которые должны подтвердить или опровергнуть указание на сверхтяжелые элементы» (это цитата из статьи).

Если считать интерпретацию опытов правильной, то можно оценить, что в образцах находилось несколько сот пикограммов (1 *пг* 10^{-12} *г*) сверхтяжелых элементов. И тогда мы скоро узнаем о свойствах этих новых элементов.

---

*) А не 114, как это предсказывали теоретики.

В. Ярмоленко

Складывание фигур

Будем рассматривать плоские фигуры, ограниченные замкнутой линией, не имеющей самопересечений.

В этой статье конгруэнтные фигуры о т о ж д е с т в л я ю т с я (не различаются), т. е. множество фигур, конгруэнтных данной фигуре, считается одной фигурой. Для классов конгруэнтных между собой фигур можно было бы ввести какой-нибудь новый термин, например назвать такие классы «абстрактными фигурами». Однако, поскольку в статье будут рассматриваться только «абстрактные фигуры», мы будем их называть просто *фигурами*. Обозначим множество рассматриваемых фигур через Γ. Таким образом, в Γ входит ровно один треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (ведь все такие треугольники конгруэнтны!), ровно один круг радиуса 17 и т. д.

Если фигура A имеет ось симметрии, то эта ось разбивает фигуру на две конгруэнтные части. Назовем каждую из этих частей *результатом складывания* фигуры A (по рассматриваемой оси). Результат складывания может в свою очередь иметь ось симметрии. Таким образом, исходная фигура может, вообще говоря, допускать многократное складывание.

Существуют фигуры, допускающие бесконечное складывание. Такими фигурами являются, например, круг, сектор круга, круговая трапеция (фигура, ограниченная дугами концентрических окружностей и соответствующими отрезками радиусов), равнобедренный прямоугольный треугольник и прямоугольник. Впрочем, слово «например» является в предыдущей фразе излишним: можно доказать, что других фигур, допускающих бесконечное складывание, в Γ нет (бесконечная полоса, ограниченная параллельными прямыми, не входит в Γ!).

Обозначим через $A^{\triangledown}$ множество всех фигур, либо конгруэнтных фигуре A, либо получающихся из фигуры A в результате одного или нескольких складываний.

Если фигура A не имеет оси симметрии, то множество $A^{\triangledown}$ состоит только из самой фигуры A.

Если A — круг, то $A^{\triangledown}$ состоит из самого круга A и его секторов с центральными углами $\frac{2\pi}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Если A — ромб, не являющийся квадратом, то $A^{\triangledown}$ состоит из четырех фигур. На рисунке 1 изображено это множество; стрелками указан порядок складывания. Результаты складывания фигур B и D совпадают. Заменим каждую из фигур множества $A^{\triangledown}$ точкой, обозначенной той же буквой, что и сама фигура. Точку, соответствующую фигуре, соединим отрезком с точкой, соответствующей результату складывания этой фигуры, причем первую точку поместим выше второй. На рисунке 2 изображена полученная диаграмма.

Подобную *диаграмму складывания* можно построить для любой фигуры. Диаграмма складывания делает наглядной «степень симметричности» фигуры.

На рисунке 3 изображены фигура A и ее диаграмма складывания. В результате складывания фигуры A могут быть получены две неконгруэнтные фигуры B и K; поэтому на диаграмме складывания из точки A исходят два отрезка. В результате складывания неконгруэнтных фигур C и L получается фигура D; поэтому на диаграмме складывания отрезки

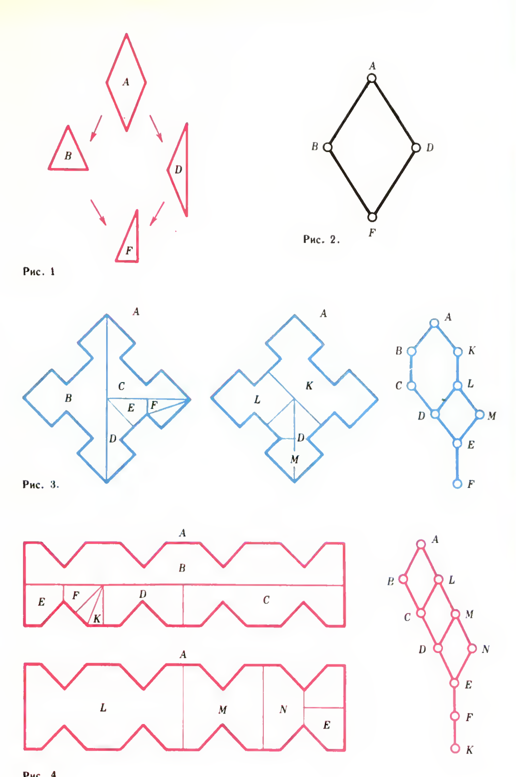


Рис. 1

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

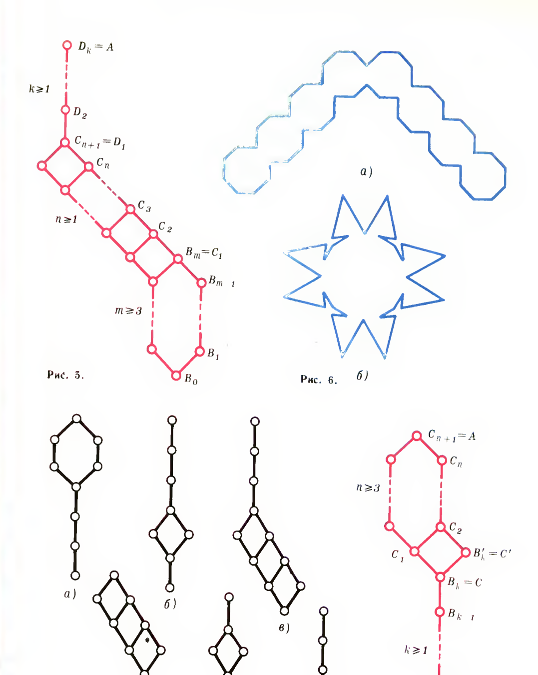


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

из точек C и L входят в точку D.

На рисунке 4 изображены еще одна фигура A и ее диаграмма складывания.

Поставим теперь обратную задачу: дана диаграмма (вроде тех, которые изображены на рисунках 2—4; мы не уточняем понятия диаграммы); найти фигуру, диаграммой складывания которой будет данная диаграмма.

Для решения таких задач полезно ввести понятие раскладывания: назовем фигуру A *результатом раскладывания* фигуры B по прямой l, если фигура B является результатом складывания фигуры A по этой прямой.

Построение фигуры A по диаграмме рисунка 3 можно осуществить раскладыванием прямоугольного треугольника F с острым углом 22,5° последовательно по соответствующим прямым в фигуры E, D, C, B, A. Фигуру A из треугольника F можно получить еще двумя «цепочками раскладываний» (см. диаграмму).

Для диаграммы, изображенной на рисунке 5, аналогичная задача решается следующим образом (сделайте чертеж!). Возьмем в качестве B_0 разносторонний выпуклый четырехугольник $MNPQ$, у которого $\hat{M}=\frac{\pi}{2^{m-1}}$, $\hat{N}=\frac{\pi}{2}$, $\hat{Q}<\frac{\pi}{2}$; разложим его последовательно m раз по прямым $c_1 \supset MN, c_2, \ldots, c_m$, проходящим через M, в фигуры $B_1, B_2, \ldots, B_m$; фигура $B_m = C_1$ — выпуклый многоугольник с центром симметрии M, противоположные стороны которого параллельны. Разложим теперь C_1 последовательно n раз по параллельным прямым $a_1 \perp c_1, a_2, \ldots, a_n$ в фигуры $C_2, C_3, \ldots, C_{n+1}$. В многоугольнике $C_{n+1}=D_1$ фиксируем такие соседние стороны l, l_1, что $l \perp c_1$; разложим его последовательно $k-1$ раз по параллельным прямым $b_1 \supset l_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ (такие прямые найдутся, так как сторона l_1 многоугольника D_1 параллельна его противоположной стороне) в фигуры $D_2, D_3, \ldots, D_k$. Многоугольник $D_k = A$ — искомый.

Для каждой конкретной «обратной задачи» трудность состоит в нахождении начальной фигуры для раскладывания.

Задачи

1. Докажите, что треугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — равнобедренный прямоугольный.

2. Докажите, что четырехугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — прямоугольник.

3. Докажите, что многоугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — треугольник или четырехугольник. (Указание. При $n>4$ всякое складывание n-угольника приводит к многоугольнику с меньшим числом сторон.)

4. Постройте диаграммы складывания круга, сектора круга, круговой трапеции и равнобедренного прямоугольного треугольника.

5. Постройте диаграмму складывания прямоугольника, если отношение длин его сторон: а) равно 2^i ($i=0, 1, 2, 3, \ldots$); б) не равно 2^i.

6. Постройте диаграммы складывания фигур, изображенных на рисунке 6.

7. Докажите, что любой треугольник допускает бесконечное раскладывание.

8. Найдите фигуры, диаграммы складывания которых имеют вид, указанный на рисунках 7 и 8.



Лаборатория «Кванта»

В. Майер,
Н. Назаров

АВТОМАТИЧЕСКИЙ СИФОН

С работой сифона — простейшего устройства для перекачки жидкостей — вы познакомились еще в шестом классе. Рассказывают, что знаменитый американский физик Роберт Вуд еще мальчишкой начинал свои увлекательные эксперименты именно с сифона.

«Вокруг лужи было возвышение больше чем на фут, и все хорошо знали, что вода не течет в гору. Роб положил шланг на землю, велел одному из мальчиков заткнуть конец пальцем, а сам начал наливать воду в другой, пока весь шланг не наполнился. Уже тогда, по природе своей — демонстратор, Роб взял этот конец и вместо того, чтобы просто положить его на землю, перекинул шланг через высокий забор, который отделял дорогу от канавы. Вода потекла через сифон. Это, вероятно, была первая публичная научная победа Вуда» *).

Обычный сифон настолько прост, что, казалось бы, не нуждается в усовершенствованиях. Однако его недостатком является необходимость удалять воздух из колен сифона перед

*) В. Сибрук. Роберт Вуд. М., «Физматгиз», 1960.



Рис. 1.

Рис. 2.

тем, как он начнет работать. Просто поразительна изобретательность человеческого ума, который, уяснив для себя суть этого недостатка, сумел устранить его примитивнейшими средствами!

Мы расскажем вам об автоматическом сифоне *). Стеклянную трубку длиной около 60 *см* и внутренним диаметром 3—4 *мм* над пламенем изогните так, чтобы образовались два колена, одно из которых имеет длину порядка 25 *см* (рис. 1). В этом колене на расстоянии 33—35 *мм* от его конца ребром надфиля (смоченного водой) аккуратно пропилите небольшое отверстие (*1*). Площадь его должна быть не более 0,5—1 *мм*². В стенке шарика для пинг-понга шилом проколите отверстие и круглым надфилем расширяйте его до тех пор, пока стеклянная трубка не будет с трением входить в него. Проденьте трубку в сделанное отверстие так, чтобы ее конец уперся в диаметрально противоположную точку стенки шарика. При этом отверстие в стеклянной трубке должно оказаться внутри шарика вблизи его поверхности (см. рис. 1). Соединение стеклянной трубки с шариком должно быть герметичным. Если вы немного ошиблись и сделали отверстие в шарике слишком большого диаметра, место соединения обмажьте пластилином. В шарике вблизи конца трубки, упирающегося в его стенку, проколите еще одно отверстие (*2*). Его первоначальный диаметр должен быть примерно равен 1 *мм*.

Быстро опустите колено сифона с шариком на его конце в стакан с водой. Почти сразу в этом колене появляется поднимающийся вверх столб воды, разделенный пузырьками воздуха. Он доходит до места перегиба сифона, опускается по второму колену вниз (рис. 2) и спустя небольшое время из отверстия второго колена начинает бить сплошная струя!

Если опыт не получается, нужно просто тщательно отладить прибор. Работа автоматического сифона зависит от правильного подбора площадей отверстий в стеклянной трубке и шарике. Неудачное расположение стеклянной трубки относительно шарика или недостаточная герметичность соединения шарика с трубкой также могут привести к плохой работе сифона. Диаметр отверстия в шарике можно постепенно увеличивать надфилем, добиваясь наилучших результатов. После наладки прибора шарик можно приклеить к стеклянной трубке клеем БФ-2.

*) Автоматический сифон изобретен С. Д. Платоновым и описан в журнале «Заводская лаборатория», № 6 (том 4), 1935.

Как работает автоматический сифон? Обратимся снова к рисунку 1. Когда шарик опускают в стакан с водой, вода начинает заходить внутрь его через отверстие *2*. Одновременно вода поднимается и по стеклянной трубке, попадая в нее через открытый конец трубки. Скорость подъема воды в трубке больше, чем в шарике. Столб воды, поднявшийся по трубке до отверстия *1* в ее стенке, как бы перекрывает его. По мере заполнения шарика водой давление воздуха в шарике увеличивается. В какой-то момент в отверстие *1* трубки «проталкивается» маленький воздушный пузырек. Он отсекает небольшой столбик воды и поднимает его вверх. Поднимающаяся по трубке вода вновь перекрывает отверстие *1*, и снова сжатый воздух проталкивается в виде пузырька в это отверстие и отсекает новую порцию воды. Таким образом, в колене трубки с шариком образуется воздушно-водяной столб, средняя плотность которого меньше плотности воды. Под действием гидростатического давления этот столб поднимается до перегиба трубки, спускается по второму колену и, когда шарик полностью заполнится водой, «вытягивает» за собой сплошной поток воды. Сифон начинает работать.

Упражнения

1. Экспериментально покажите, что в шарик вода должна затекать медленнее, чем в стеклянную трубку. Объясните, почему так происходит.

2. Чтобы убедиться в правильности объяснения принципа действия автоматического сифона, замените непрозрачный шарик небольшим стеклянным пузырьком с резиновой пробкой. В целом все устройство с пузырьком должно быть точно таким же, как и при использовании шарика. Стеклянную трубку воткните в пузырек через отверстие в резиновой пробке. Прозрачные стенки пузырька позволят вам наблюдать процесс образования воздушно-водяного столба в стеклянной трубке.

3. Выясните, зависит ли высота подъема воздушно-водяного столба от глубины погружения в воду колена сифона с шариком.

4. Изготовьте автоматический сифон, заменив стеклянную трубку резиновой.

Задачи наших читателей

1. На плоскости на прямой p задан отрезок AB длины l. Его можно перемещать по плоскости, но так, чтобы:

1) в любой момент он был параллелен прямой p;

2) траектории точек A и B не пересекались;

3) в конечном положении отрезок снова попал на прямую p.

Насколько далеко может сместиться по прямой p этот отрезок?

В. Измайлов
(г. Тюмень)

2. Решить уравнения ($\overline{xyz}$ — число, записанное цифрами x, y, z и т. п.):

а) $(x+y+z)^3=\overline{xyz}$;

б) $(x+y+z+u)^3=\overline{xyzu}$;

в) $(x+y)^3=\overline{xyx}$;

г) $\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^3=\overline{xyz}$.

И. Михалкович
(Минская обл.)

3. a, b, c — действительные положительные числа.

а) Доказать, что

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leqslant a^a b^b c^c.$$

б) $a<b<c$. Доказать, что

$$a^c b^a c^b < a^b b^c c^a < a^a b^b c^c.$$

Р. Шейнцвит
(г. Киев)



И. Шарыгин

ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Геометрия начинается с треугольника. Взяв школьный учебник по геометрии, мы увидим, что первые содержательные теоремы касаются именно треугольника. Все предыдущее — лишь аксиомы, определения или простейшие из них следствия. На заре своего возникновения планиметрия по существу и была «геометрией треугольника».

«Геометрия треугольника» может гордиться теоремами, носящими имена Эйлера, Торричелли, Лейбница. На рубеже XIX—XX веков благодаря большому количеству работ, посвященных треугольнику, образовался даже целый раздел планиметрии, названный «Новой геометрией треугольника». Многие из этих работ сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными; используемая в них терминология полузабыта и встречается разве что в энциклопедиях. Однако некоторые теоремы «Новой геометрии» продолжают жить и по сей день. О двух таких теоремах — Чевы и Менелая — рассказывается в этой статье *).

Теоремы Чевы и Менелая можно назвать «двойственными» теоремами: они похоже формулируются (причем каждая теорема выступает как бы в двух обличьях) и доказываются, они взаимозаменяемы при решении задач. Теоремы Чевы и Менелая оказываются особенно полезными в тех случаях, когда нужно «выяснить отношения» между точками и прямыми, — например, доказать, что какие-то три прямые пересекаются в одной точке, три точки лежат на одной прямой и т. п.

*) Желающих познакомиться с геометрией треугольника более подробно мы отсылаем к книге С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (М., Учпедгиз, 1962).

Что вы знаете о медианах, высотах, биссектрисах треугольника? Наверное, каждый из вас, подумав, сможет доказать, что, например, биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и высоты — тоже, и медианы (теоремы о биссектрисах и медианах треугольника, конечно же, есть в школьных учебниках по геометрии)... Однако доказательства этих теорем не так-то уж просты. Оказывается, любое из этих утверждений легко получить, если знать... теорему Чевы.

Обозначения и формулировки теорем

Нам понадобятся векторы; мы будем обозначать их, как обычно: либо маленькими латинскими буквами со стрелочкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, ..., либо двумя большими буквами со стрелочкой: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и т. д. Под *углом* $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ *между двумя векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы будем понимать угол, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки) до совпадения с направлением вектора $\vec{b}$ (рис. 1). Положим для определенности, что $0 \leqslant \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) < 2\pi$*). Из этого определения и свойств функции $y = \sin x$ сразу следует, что

$$\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = -\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}).$$

Рассмотрим два треугольника: ABC (обозначим его через Δ) и $A_1B_1C_1$, вершины A_1, B_1 и C_1 которого лежат на прямых BC, AC и AB соответственно; обозначим треугольник $A_1B_1C_1$ через Δ_1. Легко видеть, что векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$ коллинеарны; точно так же коллинеарны и векторы $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{B_1A}$. Введем для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ величину $\left\{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\right\}$, равную отношению длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, взятую со знаком «+», если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, и со знаком «—» в противном случае. Определим теперь для треугольников Δ и Δ_1 величину $R(\Delta, \Delta_1)$:

$$R(\Delta, \Delta_1) = \left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\}. \quad (1)$$

Пусть далее ω — тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, коллинеарных векторам $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ (сторонам треугольника ABC), ω_1 — тройка векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$, коллинеарных векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Определим для ω и ω_1 величину $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}_1)} \times$$

$$\times \frac{\sin \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}_1)} \cdot \frac{\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{c}, \vec{b}_1)}. \quad (2)$$

Л е м м а.

$$R(\Delta, \Delta_1) = R^*(\omega, \omega_1). \quad (3)$$

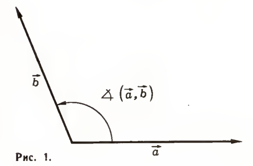


Рис. 1.

*) Наше определение угла между векторами несколько отлично от школьного. Поэтому мы и ввели обозначение $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ (а не $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$). Благодаря такому определению угла, как это будет видно из дальнейшего, удается доказать ряд довольно изящных утверждений.

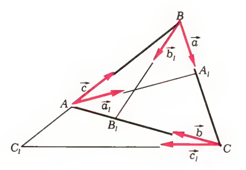


Рис. 2.

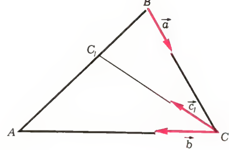


Рис. 3.

Доказательство. Сначала проверим, что R и R^* одного знака. Легко убедиться, что изменение направления одного из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ не изменит величины $R^*(\omega, \omega_1)$, поэтому можно выбрать направление каждого из них определенным образом; например, можно считать векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ совпадающими по направлению с векторами $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ (рис. 2). В этом случае каждая из трех дробей, входящих в выражение $R(\Delta, \Delta_1)$, имеет тот же знак, что и соответствующая дробь, входящая в выражение $R^*(\omega, \omega_1)$. Например, дроби

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\} \text{ и } \frac{\sin \angle (\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin \angle (\vec{a}, \vec{c}_1)}$$

будут положительны, если точка C_1 расположена между точками A и B, и отрицательны в противоположном случае (рис. 3 и 2).

Осталось доказать, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = |R^*(\omega, \omega_1)|$. Имеем

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\}\right| = \frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}} = \frac{{}^1/_2\,|AC|\cdot|CC_1|\cdot|\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{{}^1/_2\,|BC|\cdot|CC_1|\cdot|\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|} = \frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|},$$

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\}\right| = \frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{a}_1)|}{|\sin \angle(\vec{b}, \vec{a}_1)|},$$

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\}\right| = \frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{|\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}_1)|}{|\sin \angle(\vec{c}, \vec{b}_1)|}.$$

Перемножая эти три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = |R^*(\omega, \omega_1)|$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится равенство, непосредственно вытекающее из определения $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{1}{R^*(\omega_1, \omega)}\,^{*)}. \qquad (4)$$

Сформулируем теперь теоремы Чевы и Менелая.

Теорема Чевы. *Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = 1, \qquad (5)$$

или эквивалентное ему равенство

$$R^*(\omega, \omega_1) = 1. \qquad (5')$$

Теорема Менелая. *Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = -1, \qquad (6)$$

или эквивалентное ему равенство

$$R^*(\omega, \omega_1) = -1. \qquad (6')$$

Доказательство теоремы Чевы

Необходимость. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажем, что выполняются условия (5) и (5').

---

*) Выражение $R^*(\omega_1, \omega)$ получается из выражения $R^*(\omega, \omega_1)$ взаимной заменой векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ и $\vec{b}_1$, $\vec{c}$ и $\vec{c}_1$.

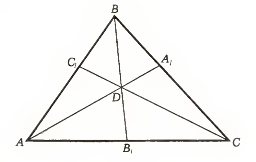


Рис. 4а.

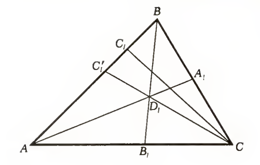


Рис. 4б.

Заметим, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то либо все три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника ABC, либо же одна из точек лежит на стороне треугольника, а две другие — на продолжениях соответствующих сторон. В первом случае все дроби, входящие в выражение $R(\Delta, \Delta_1)$, положительны, а во втором случае одна из трех дробей, входящих в $R(\Delta, \Delta_1)$, положительна, а две другие — отрицательны, так что снова выражение $R(\Delta, \Delta_1)$ (а следовательно, и $R^*(\omega, \omega_1)$ — см. лемму) больше нуля. Докажем теперь, что $|R^*(\omega, \omega_1)| = 1$ (так как $R^*(\omega, \omega_1) > 0$, из этого будет следовать, что $R^*(\omega, \omega_1)$ равно единице). Обозначим точку пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 через D (рис. 4а). Применяя теорему синусов, получим

$$\frac{|\sin\angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{|\sin\angle(\vec{b}, \vec{a}_1)|} = \frac{|DA|}{|DC|},$$

$$\frac{|\sin\angle(\vec{c}, \vec{a}_1)|}{|\sin\angle(\vec{c}, \vec{b}_1)|} = \frac{|DB|}{|DA|},$$

$$\frac{|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}_1)|}{|\sin\angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|} = \frac{|DC|}{|DB|}.$$

Перемножая эти равенства, видим, что $|R^*(\omega, \omega_1)| = 1$. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем методом «от противного». Допустим, что $R(\Delta, \Delta_1)\ (= R(\omega, \omega_1)) = 1$, но прямые AA_1, BB_1 и CC_1 не проходят через одну точку (рис. 4б). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 через D_1, а через C_1' — точку пересечения прямых AB и CD_1. Поскольку прямые AA_1, BB_1 и CC_1' пересекаются в одной точке,

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1'}}{\overrightarrow{C_1'B}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\} = 1.$$

Но по условию

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1'}}{\overrightarrow{CB_1'}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\} = 1,$$

откуда $\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1'}}{\overrightarrow{C_1'B}}\right\} = \left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\}$. Так как и точка C_1, и точка C_1' лежат на прямой AB, из этого следует, что точки C_1 и C_1' совпадают. Теорема Чевы доказана.

Доказательство теоремы Менелая

Необходимость. Известно, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Нужно доказать равенства (6) и (6′).

Снова заметим, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то либо все они находятся на продолжениях BC, AC и AB сторон треуголь-

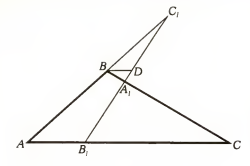


Рис. 5.

ника ABC, либо же две из точек A_1, B_1, C_1 находятся на соответствующих им сторонах, а третья — на продолжении. В обоих случаях выражение $R(\Delta, \Delta_1)$ будет отрицательным (убедитесь в этом). Докажем теперь, что если точки A_1, B_1, C_1 — на одной прямой, то $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$ (поскольку $R(\Delta, \Delta_1) < 0$, из этого будет следовать, что $R(\Delta, \Delta_1) = -1$).

Проведем через точку B прямую, параллельную AC, и обозначим точку ее пересечения с прямой $B_1A_1C_1$ через D (рис. 5).

Используя подобие, легко получим

$$\left\{\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\right\} = \frac{|B_1C|}{|BD|}, \quad \left\{\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}}\right\} = \frac{|BD|}{|AB_1|}.$$

Добавив очевидное равенство $\frac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|}$ и перемножив все три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$. Необходимость условий теоремы Менелая доказана.

Доказательство достаточности условий (6) и (6′) теоремы Менелая проводится аналогично доказательству достаточности условий (5) и (5′) теоремы Чевы.

Несколько следствий

Введение в формулировки теорем Чевы и Менелая двух эквивалентных условий (5) и (5′), (6) и (6′) сделано не только для облегчения доказательства этих теорем. В одних задачах оказывается удобным использовать одно из условий, в других — другое. Убедитесь в этом, попробовав самостоятельно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке. Если же эти три прямые пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис, также пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой.*

Если мы вспомним про равенство (4), то легко докажем

Утверждение 2. *Если три прямые, проходящие через вершины A, B и C треугольника ABC параллельно сторонам B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и прямые, проходящие через вершины A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно сторонам BC, AC и AB треугольника ABC, также пересекаются в одной точке. Если же первые три прямые пересекают соответствующие стороны треугольника ABC в трех точках, расположенных на одной прямой, то то же самое имеет место и для прямых, проходящих через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно BC, AC и AB* (рис. 6, 7).

Докажите самостоятельно также

Утверждение 3. *Если прямые, проходящие через вершины A, B и C треугольника ABC перпендикулярно сторонам B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на прямые BC, AC и AB, также*

пересекаются в одной точке. Если же первая тройка прямых пересекает соответствующие стороны треугольника ABC в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, проходящие через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно сторонам треугольника ABC, пересекают соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в трех точках, расположенных на одной прямой (рис. 8, 9).

Приведем еще два примера использования теорем Чевы и Менелая.

Утверждение 4 (*теорема Паскаля*). *Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 — точки, расположенные на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим точки пересечения прямых, о которых говорится в условии, буквами K, L и M соответственно. Будем считать, что прямые A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 не пересекаются в одной точке; тогда они образуют треугольник — обозначим его ABC, где A — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_5A_6, B — прямых A_1A_2 и A_4A_3 и, наконец, C — прямых A_3A_4 и A_5A_6.

Составим следующую таблицу:

A	K	A_1	A_2	B
B	A_4	M	A_3	C
C	A_5	A_6	L	A

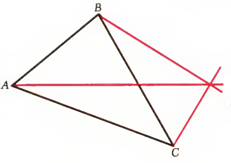
Буквы, стоящие в каждой строке и каждом столбце этой таблицы, соответствуют точкам, расположенным на одной прямой.

Поскольку точки K, A_4 и A_5 лежат на одной прямой и на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, должно выполняться условие (6), а именно:

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_4}}{\overrightarrow{A_4C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CA_5}}{\overrightarrow{A_5A}}\right\} = -1. \quad (7)$$

Аналогично

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CA_6}}{\overrightarrow{A_6A}}\right\} = 1, \quad (8)$$



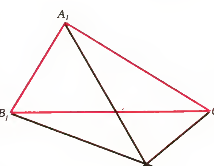
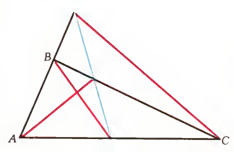


Рис. 6



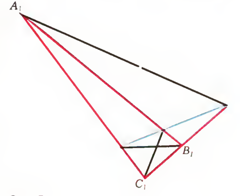


Рис. 7.

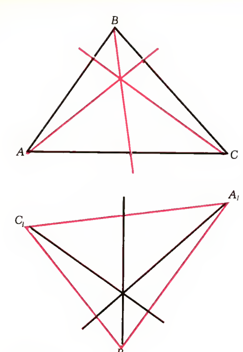
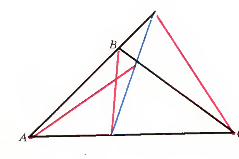


Рис. 8.



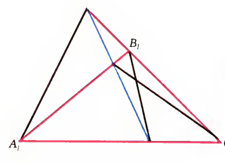


Рис. 9.

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{A_2B}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_3}}{\overrightarrow{A_3C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}}\right\} = -1. \qquad (9)$$

Поскольку точки A_1, A_2, A_5 и A_6 лежат на одной окружности и точка A — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_5A_6, то $|AA_1|\cdot|AA_2| = |AA_5|\cdot|AA_6|$. Определим для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$ величину $\{\overrightarrow{AA_i}\cdot\overrightarrow{AA_j}\}$, равную произведению длин векторов $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$, взятому со знаком «+», если векторы $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$ сонаправлены, и со знаком «—», если они направлены противоположно. Тогда последнее равенство в новых обозначениях мы можем переписать так:

$$\{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AA_2}\} = \{\overrightarrow{AA_5}\cdot\overrightarrow{AA_6}\} = \{\overrightarrow{A_5A}\cdot\overrightarrow{A_6A}\}. \qquad (10)$$

Аналогично

$$\{\overrightarrow{BA_4}\cdot\overrightarrow{BA_3}\} = \{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_2B}\}, \qquad (11)$$

$$\{\overrightarrow{CA_5}\cdot\overrightarrow{CA_6}\} = \{\overrightarrow{A_4C}\cdot\overrightarrow{A_3C}\}. \qquad (12)$$

Перемножая равенства (7) — (9) с учетом равенств (10 — (12) и того, что, согласно определению, например, $\left\{\frac{\overrightarrow{BA_4}}{\overrightarrow{A_4C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_3}}{\overrightarrow{A_3C}}\right\} = \frac{\{\overrightarrow{BA_4}\cdot\overrightarrow{BA_3}\}}{\{\overrightarrow{A_4C}\cdot\overrightarrow{A_3C}\}}$, получаем $\left\{\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\right\}\times$ $\times\left\{\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}}\right\} = -1$, что по теореме Менелая и означает принадлежность точек K, L и M одной прямой.

Случай, когда прямые A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в одной точке (и тем самым не образуют треугольника ABC), разберите самостоятельно.

На рисунках 10—12 изображены три различных случая расположения точек $A_1, \ldots, A_6$. Ими, конечно, не исчерпываются все возможности.

И в заключение — еще одно следствие.

У т в е р ж д е н и е 5. *Пусть из точки A, взятой вне окружности, проведены две касательные AM и AN к окружности и две секущие, и пусть P и Q — точки пересечения окружности с первой секущей, а точки K*

и L — со второй. Тогда прямые PK, QL и MN пересекаются в одной точке.

Доказательство (рис. 13). Применим теорему Чевы к треугольнику KLM. Заметим, что прямые PK, QL и MN пересекутся в одной точке, если выполняется равенство

$$\frac{\sin \widehat{LMN}}{\sin \widehat{NMK}} \cdot \frac{\sin \widehat{KLQ}}{\sin \widehat{QLM}} \cdot \frac{\sin \widehat{MKP}}{\sin \widehat{PKL}} = 1. \quad (13)$$

Все углы, фигурирующие в последнем выражении, — вписанные в данную окружность; синусы этих углов пропорциональны длинам стягиваемых ими хорд (так, например, $\sin \widehat{LMN} = \frac{|LN|}{2R}$, где R — радиус окружности). Поэтому равенство (13) эквивалентно такому равенству:

$$\frac{|LN|}{|NK|} \cdot \frac{|KQ|}{|QM|} \cdot \frac{|MP|}{|PL|} = 1. \quad (13')$$

Покажем, что (13′) в самом деле выполняется. Из подобия треугольников AMP и AMQ получаем $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{|AM|}{|AQ|}$.

Из подобия треугольников APL и AQK $\frac{|KQ|}{|PL|} = \frac{|AQ|}{|AL|}$, и, наконец, из подобия треугольников ALN и ANK $\frac{|LN|}{|NK|} = \frac{|AL|}{|AM|}$. Перемножая последние три равенства, получаем (13).

Замечание. Из утверждения 5 следует, что с помощью одной линейки через данную точку вне окружности можно провести касательную. Способ построения показан на рисунке 14.

Задачи

1. Докажите, что: а) биссектрисы внешних углов треугольника пересекают прямые,

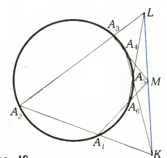


Рис. 10.

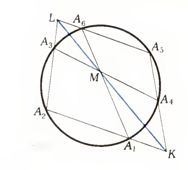


Рис. 11.

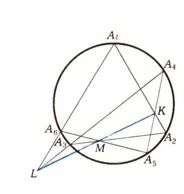


Рис. 12.

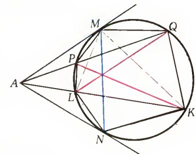
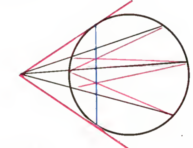


Рис. 13.


Рис. 14.

на которых лежат противоположные стороны, в трех точках, расположенных на одной прямой; б) касательные к окружности, описанной около треугольника, проведенные в вершинах треугольника, пересекают прямые, на которых лежат противоположные стороны треугольника, в трех точках, принадлежащих одной прямой.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что если $\widehat{CA_1B_1}=90°$, то A_1B_1 — биссектриса угла AA_1C.

3. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к биссектрисам треугольника в их серединах, пересекают стороны треугольника (или продолжения сторон), на которые опущены соответствующие этим перпендикулярам биссектрисы, в трех точках, лежащих на одной прямой.

4. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2, сторону BC — в точках A_1 и A_2, сторону CA — в точках B_1 и B_2. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.

5. Даны три непересекающиеся окружности. Для каждой пары окружностей определена точка пересечения общих внешних и точка пересечения общих внутренних касательных. Докажите, что получившиеся шесть точек расположены на трех прямых, по три точки на каждой.

6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1. Пусть C_2 — точка пересечения прямых AB и A_1B_1, A_2 — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, B_2 — точка пересечения прямых AC и A_1C_1. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

7. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D, E и F. Докажите, что середины отрезков DC, AE и BF лежат на одной прямой.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\widehat{ADB}=26°$, $\widehat{BCD}=51°$, $\widehat{BCA}=13°$, $\widehat{ACD}=73°$. Найдите $\widehat{ABD}$.

9. На стороне AC треугольника ABC взята точка K, а на медиане BD — точка P так, что площадь треугольника BPC равна площади треугольника APK.

Определите геометрическое место точек пересечения прямых AP и BK.

10. Дан треугольник ABC. Определим точки A_1, B_1 и C_1 следующим образом. Точка A_1 — это середина хорды, высекаемой на стороне BC окружностью, касающейся сторон BA и CA треугольника ABC. Аналогично B_1 — середина хорды, высекаемой на стороне AC окружностью, касающейся сторон AB и CB, а C_1 — середина хорды, высекаемой на стороне AB окружностью, касающейся сторон AC и BC. Дугам всех трех окружностей, находящимся внутри треугольника, соответствуют равные центральные углы. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

11. На ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки K, L, M, N. Докажите, что для того чтобы фигура $KLMN$ являлась плоским четырехугольником, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$|AK|\cdot|BL|\cdot|CM|\cdot|DM| = |KB|\cdot|LC|\cdot|MD|\cdot|NA|.$$

12. Через вершины A и B четырехугольника $ABCD$ проведена окружность. Прямые AD и BC вторично пересекают окружность в точках K и L, а прямые AC и BD — в точках M и N. Докажите, что прямые KL, MN и CD пересекаются в одной точке или параллельны.

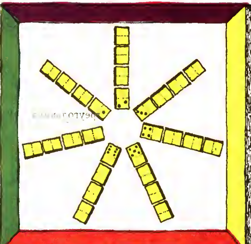
Как устроено атомное ядро

В 1937 году сотрудник министерства иностранных дел Великобритании полковник Дж. Мур-Брабазон обратился в редакцию английского журнала «Nature» («Природа») с просьбой рассказать о некоторых непонятных ему особенностях строения атомного ядра. Отвечал полковнику профессор Андраде, известный физик, автор многих популярных книг и статей. Эту любопытную переписку мы решили довести до сведения наших читателей. Перевод и подготовка публикации выполнены В. Березиным.

Вот что писал Мур-Брабазон в своем письме:

«Взялся бы хоть один из ученых-популяризаторов объяснить, как преодолеть возникающие у любителей физики трудности в понимании современной картины строения атома. Мы знаем, что она очень приблизительна. Нам известно, что биллиардный шар в качестве модели атома неприемлем. Недавние эксперименты по бомбардировке атома позволили построить общую огрубленную схему. Гейзенберг, с его принципом неопределенности, внушает сомнения в ее правильности. Но нам не хотелось бы, чтобы объяснения опирались на квантовую механику; мы бы рассматривали такие объяснения как «недружественное действие».

(Продолжение см. с. 42)



Головоломки

Фишки на поле

На игровом поле, состоящем из 25 клеток и 2 перегородок (см. рисунок), стоят 20 фишек: 10 красных и 10 зеленых.

За один ход можно передвинуть любую фишку на любую свободную клетку по свободным клеткам.

Какое наименьшее количество ходов надо сделать, чтобы поменять местами красные и зеленые фишки?

Звезда из домино

Расположите все 28 косточек домино в виде семиконечной звезды (по четыре костяшки на каждом луче), но так, чтобы:

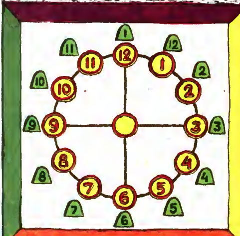
1) в центр выходили кости с 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками;

2) на концах лучей также были все очки от 0 до 6;

3) в каждом луче косточки укладывались согласно правилам игры в домино: 0 к 0, 1 к 1 и т. д.;

4) суммы очков на косточках домино во всех лучах были одинаковы.





Циферблат

На окружности нарисованы 12 кружков, тринадцатый — в центре. Некоторые кружки соединены линиями, на крайних кружках стоят 12 фишек с числами от 1 до 12 (см. рисунок). Наша цель: передвигая по одной фишке на свободный кружок по линиям, поставить каждую фишку в кружок с ее номером. Задача имеет решение, состоящее из 49 ходов (перемещений). А может, вы найдете более короткое?

Л. Мочалов

задачник Кванта

Задачи

М411—М415; Ф423—Ф427

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 31 декабря 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35 Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М411» или «...Ф423». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М411. Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину x (рис. 1). Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b, c.

А. Ягубьянц

М412. В городе на каждую площадь выходит не менее трех улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на любую другую.

А. Гольдберг

М413. Для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: для любой функции f, определенной на отрезке $[0, 1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0) = f(1) = 0$, уравнение $f(x+a) - f(x) = 0$ имеет решение?

а) Выясните сначала этот вопрос для случая $a = 1/2$.

б) Докажите, что для $a = 1/n$, где n — натуральное число, сформулированное утверждение верно.

в) Докажите, что для остальных положительных a оно не верно.

При решении этой задачи может пригодиться такое свойство непрерывных функций: если функция g определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и на концах его принимает значения разных знаков, то между a и b найдется точка c, в которой $g(c) = 0$.

И. Яглом

М414. а) Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника, площади четырех равны S, площадь пятого — $3S/2$. Найдите площадь x пятиугольника.

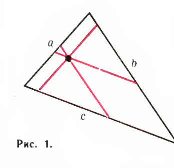


Рис. 1.

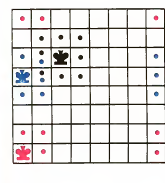


Рис. 2.

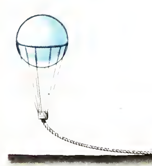


Рис. 3.

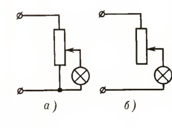


Рис. 4.

б)* Докажите, что если S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади пяти этих треугольников, а x — площадь пятиугольника, то

$$x^2 - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)\,x + (S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1) = 0.$$

А. Тихомиров

М415. Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске $n \times n$, чтобы они не били друг друга? Торическая шахматная доска получается из обычной размером $n \times n$, у которой верхняя и нижняя горизонтали, а также левая и правая вертикали считаются склеенными. На торической доске с каждого поля король может пойти на восемь соседних полей (рис. 2).

А. Футер

Ф423. Масса воздушного шара вместе с волочащимся за ним канатом равна M (рис. 3). Действующая на шар архимедова выталкивающая сила равна F, коэффициент трения каната о землю μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха $\mathbf{F}_c = -\alpha\mathbf{v}$. Найти скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью u.

А. Трубачев

Ф424. Для того чтобы лампочку, рассчитанную на напряжение сети 110 *в*, включить в сеть с напряжением 220 *в*, можно воспользоваться реостатом, который может быть включен по схемам *а* и *б* (рис. 4). Найти к. п. д. каждой из схем. Сопротивление лампочки 1 000 *ом*, а реостата 2 000 *ом*.

Ф425. В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд Q. Между пластиной и обкладками конденсатора при этом остаются зазоры l_1 и l_2. Площади всех пластин одинаковы и равны S. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Ф426. В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 5$ *мкм* при содержании массы вещества $m = 0{,}04$ *г* в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1 = 50$ *м*. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2 = 10$ *мкм*, если видимость сокращается до $l_2 = 20$ *м*?

Ф427. Две катушки с числами витков $n_1 = 125$ и $n_2 = 1\,000$ намотаны на тороидальный ферромагнитный сердечник диаметром $d = 5$ *см* и площадью поперечного сечения $S = 1$ *см*^{2}. По первой катушке течет постоянный ток 1 *а*, вторая катушка подключена к гальванометру. При размыкании цепи первой катушки через гальванометр проходит заряд 10^{-3} *к*. Полное сопротивление цепи второй катушки 100 *ом*. Определить магнитную проницаемость материала, из которого сделан сердечник.

Решения задач

М371—М375; Ф378—Ф382

М371. *В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причем в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любую совокупность полей, узнать совокупность (множество) чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать число в каждой клетке?*

Докажем, что наименьшее необходимое число вопросов — 6. Для этого, во-первых, покажем, что за 6 вопросов можно узнать все числа, и, во-вторых, докажем, что за меньшее число вопросов этого сделать нельзя. Но сначала разберемся в формулировке задачи.

Задавая один вопрос, мы указываем некоторое множество A полей и узнаем, какие из чисел от 1 до 64 записаны на полях из множества A, а какие — на остальных полях (множество дополнительных полей обозначим через $\overline{A}$). Таким образом, каждый вопрос — это некоторое разбиение доски на два множества A и $\overline{A}$. Мы должны задать несколько вопросов $(A_1, \overline{A}_1)$, $(A_2, \overline{A}_2)$, ..., $(A_q, \overline{A}_q)$ так, чтобы по ним однозначно определить, какое число записано на каждом поле, то есть так, чтобы для любых двух разных полей обязательно нашлось такое разбиение $(A_i, \overline{A}_i)$ из наших q, которое р а з д е л я е т эти два поля: одно из полей принадлежит A_i, а другое — $\overline{A}_i$. Иначе говоря, нужно, чтобы пересечение любых q множеств, i-е из которых — A_i или $\overline{A}_i$ — содержало не более одного поля. При этом число вопросов q должно быть возможно меньше.

I. Пример шести разбиений, позволяющих узнать все числа, показан на рисунке 1 (множества A_i, которые мы предлагаем спросить, — розовые, $\overline{A}_i$ — белые; $i = 1, 2, ..., 6$). В том, что наш план правилен, убедиться нетрудно: за три первых вопроса мы узнаем множество чисел, записанных в каждой строке, за три последних — в каждом столбце, поэтому в результате мы угадаем число в каждой клетке. (Здесь пересечение любой совокупности шести подмножеств, i-е из которых — A_i или $\overline{A}_i$ — содержит ровно один элемент!)

II. Докажем, что за 5 вопросов все числа определить нельзя. Пусть первый вопрос — $(A_1, \overline{A}_1)$. Тогда в одном из множеств A_1, $\overline{A}_1$ (можно считать, что в A_1 — ведь они совершенно равноправны) не менее 32 полей. Пусть второй вопрос — $(A_2, \overline{A}_2)$. Этот вопрос разделяет множество A_1 на два: $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A}_2$, причем в одном из них (можно считать, что в $A_1 \cap A_2$) не менее 16 полей. И, наконец, после пятого вопроса останется множество $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ из двух или более «неразличимых» полей. Ясно, что узнать, как расставлены числа в этом множестве по заданным вопросам мы не сможем.

1 4

2 5

3 6

Рис. 1.

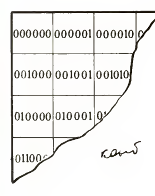


Рис. 2.

Заметим в заключение, что хотя шахматная доска и помогла нам описать пример из шести разбиений, на самом деле она в этой задаче ни при чем. Как получился пример на рисунке 1, можно объяснить с помощью двоичной системы счисления. Если все поля занумеровать по порядку двоичными числами от 000000 до 111111 (2^6 как раз равно 64 — вот чем хороша доска), как показано на рисунке 2, и отнести к множеству A_i те номера, у которых i-я цифра 0 (а к $\overline{A}_i$ — те, у которых 1), то получится наш пример. Приведенных соображений достаточно, чтобы решить задачу в общем виде — для любого количества N полей (расположенных как угодно — для определенности, в ряд), на которых написана любая перестановка чисел от 1 до N. Если $2^{q-1} < N \leqslant 2^q$, то все числа можно узнать за q вопросов, и нельзя — за $q-1$.

О подобном использовании двоичной системы для математических фокусов рассказывалось неоднократно в «Кванте» для младших школьников (см. «Квант», 1976, № 6, с. 67, статья А. Бендукидзе «О двоичной системе счисления» и № 7, с. 55, статья А. Орлова «Поиск предмета»).

◆

М372. *Дан треугольник ABC. Доказать, что условие $\widehat{ACB} \geqslant 120°$ необходимо и достаточно, чтобы для любой точки P плоскости выполнялось неравенство $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$*

В связи с этой задачей естественно возникает такая. *Пусть ABC — данный треугольник. Для какой точки плоскости сумма ее расстояний до вершин A, B и C наименьшая?* Решим эту задачу. Наиболее интересный ответ получается для того случая, когда все углы $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ треугольника меньше 120° (рис. 3).

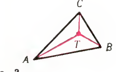


Рис. 3.

(Т1) *Искомая точка T — та, для которой $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120°$.* Точка T называется «точкой Торичелли» треугольника ABC. Красивое доказательство теоремы **Т1** использует такую лемму 1: *пусть $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник с длиной высоты h; тогда сумма расстояний до прямых A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 от любой точки P, лежащей внутри или на контуре треугольника, равна h, а от точки P, лежащей вне треугольника, — больше h.*

Для доказательства леммы 1 достаточно вместо суммы расстояний от P до прямых рассмотреть сумму площадей треугольников A_1PB_1, B_1PC_1, C_1PA_1 и сравнить ее с площадью треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 4).

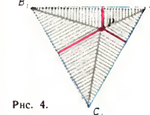


Рис. 4.

Чтобы доказать **(Т1)**, проведем через точки A, B и C прямые, перпендикулярные соответственно отрезкам TA, TB и TC. Получим равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 5). Для любой точки P сумма расстояний от P до точек A, B и C не меньше, чем сумма расстояний от P до прямых B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, — ведь наклонная не короче перпендикуляра, — а последняя сумма по лемме 1 равна высоте h треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant h$, а в точке T сумма $|AT| + |BT| + |CT|$ равна h.

Теперь изучим другой случай.

(Т2) *Если в треугольнике ABC один из углов — пусть $\widehat{C}$ — больше 120°, то искомая точка — сама эта вершина C, то есть $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$ для всех P.*

Последуем прежним путем.

Лемма 2. *Пусть $A_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник с углами $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 > 60°$ при основании, h — длина высоты, опущенной на его боковую сторону; тогда сумма расстояний до прямых A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 от любой точки P, лежащей на отрезке A_1B_1, равна h, а для всех других точек P плоскости — больше h.*

Рис. 5.

При доказательстве леммы 2 нужно учесть, что боковая сторона $|A_1C_1| = |B_1C_1|$ длиннее основания $|A_1B_1|$.

Чтобы доказать **(Т2)**, проведем через точки A, B и C прямые, перпендикулярные отрезкам CA, CB и биссектрисе угла

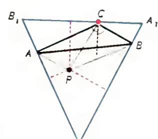


Рис. 6.

ACB (рис. 6). Получим равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий условиям леммы 2. Дальше рассуждаем так же, как в доказательстве (Т1).

Мы переходим, наконец, к самой задаче М372. Теперь для ее полного решения осталось сделать лишь небольшой логический шаг.

В условии М372 требуется доказать два утверждения: необходимость условия $\widehat{C} > 120°$ и его достаточность для выполнения неравенства $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$ для любой точки P плоскости. Достаточность мы только что доказали: это и есть теорема (Т2). Докажем необходимость, то есть докажем, что если $\widehat{C} < 120°$, то существует $P = P_0$, для которой это неравенство неверно. Рассмотрим два случая. Если все углы в треугольнике ABC меньше 120°, то, согласно (Т1), в качестве такой точки P_0 можно взять точку Торичелли T. Если же один из углов — скажем $\widehat{A}$ — больше или равен 120°, то в роли точки P_0 может выступить сама вершина A (поскольку $|BC| > |AB|$).



М373. *а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.*

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

Решение этой задачи требует только аккуратных логических умозаключений для бесконечных множеств. Вот самый характерный пример: «Пусть P — какое-то свойство члена последовательности x_n. Тогда либо для всех членов, начиная с некоторого, свойство $P(x_n)$ выполнено, либо найдется бесконечно много членов, для которых $P(x_n)$ не выполнено». Рассуждения такого типа особенно часто встречаются в учебниках по анализу — при изучении пределов и т. п.

а) Конечные куски последовательности цифр (натуральные числа) будем называть *словами* (для нас это действительно слова — в алфавите из «букв» 0, 1, ..., 9). Тогда либо для каждого знака нашей десятичной дроби (начиная с некоторого) есть слово первого класса, начинающееся с этого знака, либо существует бесконечно много знаков таких, что все начинающиеся с них слова — не первого класса (то есть все — второго класса).

Первый случай: мы можем (начиная с некоторого места) отрезать от нашей дроби последовательно одно слово первого класса за другим, то есть десятичную дробь удастся разрезать на слова первого класса (кроме, быть может, начального слова; рис. 7).

Второй случай: отметим (на рисунке 7 — красным) знаки нашей дроби, с которых начинаются слова лишь второго класса. Ясно, что слова, начинающиеся красными буквами и идущие до следующей красной буквы, дают требуемое разрезание дроби на слова второго класса.

Рис. 7.

б) Пусть слова разбиты на N классов. Мы докажем индукцией по N утверждение задачи в несколько усиленном виде (как часто бывает, доказать больше оказывается легче *). А именно, мы докажем, что если дробь уже как-то (начиная с некоторого места n_0) разделена на куски — назовем их слогами, — то можно ее разрезать (начиная с некоторого места n_1) на слова одного класса, не разрезая слогов, то есть так, что *каждое слово будет состоять из нескольких слогов*. Вы легко проверите, что для $N = 2$ этот усиленный вариант доказывается точно так же, как прежний (роль «знаков» дроби играют не цифры, а слоги). Но формально это и не нужно: ведь

---

*) См. статью Л. Цинмана «Парадокс исследователя», с. 9.

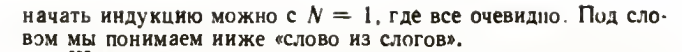



Рис. 8.

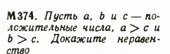
начать индукцию можно с $N = 1$, где все очевидно. Под словом мы понимаем ниже «слово из слогов».

Шаг индукции. Пусть для $N - 1$ классов утверждение доказано, а у нас их N. Пусть наша дробь разрезана на слоги (рис. 8). Тогда либо для каждого слога в дроби (начиная с некоторого) найдется слово первого класса, начинающееся с этого слога, либо существует бесконечно много слогов таких, что все начинающиеся с них слова — не первого класса. Первый случай ясен. Во втором случае разрежем всю дробь на куски, начинающиеся с «красных» слогов, и объявим эти более крупные куски слогами. Поскольку все слова, состоящие из таких укрупненных слогов, не первого класса, у нас теперь могут быть слова не более чем $(N - 1)$ разных классов; и по предположению индукции мы можем разрезать нашу дробь требуемым образом.

Приведенное здесь доказательство существования требуемого разрезания неконструктивно—не дается никакого общего способа построить (сконструировать) разрезание для произвольных правил, задающих послeдовательность, и разбиение слов на классы.

Н. Васильев

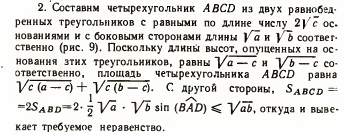
◆




М374. *Пусть a, b и c — положительные числа, $a > c$ и $b > c$. Докажите неравенство*
$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Мы приведем два решения, первое из которых — алгебраическое, а второе — геометрическое.

1. Положим $a = (1 + \alpha) c$, $b = (1 + \beta) c$, где $\alpha, \beta > 0$. Тогда $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = c(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$, $\sqrt{ab} = c\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$, и нам нужно доказать, что $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leqslant \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$. Напишем очевидное неравенство: $(\sqrt{\alpha\beta} - 1)^2 \geqslant 0$, или $2\sqrt{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha\beta$, и прибавим к обеим частям его по $(\alpha + \beta)$. Получим
$$\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta,$$
то есть $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \leqslant (\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)})^2$, что и требовалось.



Равенство имеет место в случае, если $\alpha\beta = 1$, то есть $\left(\frac{a}{c} - 1\right)\left(\frac{b}{c} - 1\right) = 1$, или $(a - c)(b - c) = c^2$, откуда $c = \frac{ab}{a+b}$.

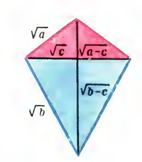


Рис. 9.

2. Составим четырехугольник $ABCD$ из двух равнобедренных треугольников с равными по длине числу $2\sqrt{c}$ основаниями и с боковыми сторонами длины $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ соответственно (рис. 9). Поскольку длины высот, опущенных на основания этих треугольников, равны $\sqrt{a-c}$ и $\sqrt{b-c}$ соответственно, площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$. С другой стороны, $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\sin(\widehat{BAD}) \leqslant \sqrt{ab}$, откуда и вытекает требуемое неравенство.

Равенство будет в случае $\sin(\widehat{BAD}) = 1$, то есть если $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$; тогда $|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$, или $a + b = (\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c})^2$, откуда $c = \frac{ab}{a+b}$.

Подумайте, как доказать более общее неравеиство

$$\sqrt{kl}+\sqrt{mn}\leqslant\sqrt{(k+n)(m+l)},$$

где k, l, m, n — иеотрицательиые числа (наше неравенство получается отсюда при $k=m=c$, $l=a-c$, $n=b-c$).

А. Резников

◆

М375. *Внутри выпуклого многогранника объема 1 отмечено $3\cdot(2^n-1)$ точки.*

Докажите, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объема $(1/2)^n$, не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки.

Доказательство будем вести по индукции.

База индукции. $n=1$, то есть в выпуклом многограинике объема 1 отмечено три точки. Проведя через две из зтнх точек плоскость, разбивающую иаш многогранннк на два равных по объему многогранника, мы получим, что в одном из них (объема 1/2) не окажется ни одной отмеченной точки.

Шаг индукции. Допустим теперь, что для всех $n\leqslant k$ утверждение задачи доказано, и докажем его для $n=k+1$ (но вначале заметим, что если утверждение задачн справедливо для многогранника с N отмеченными точками, то оно тем более справедливо и для многогранника с меньшим числом отмеченных точек). Итак, сейчас у нас внутри многогранника объема 1 отмечено $3(2^{k+1}-1)=6\cdot2^k-3$ точки. Проведем через две из иих плоскость, разбивающую наш многогранник на два равновеликих многогранника. Поскольку теперь у нас осталось $6\cdot2^k-3-2=6\cdot2^k-5$ «внутренних» отмеченных точек, в одном из этих многогранников (объема 1/2) окажется не более чем $3\cdot2^k-3=3(2^k-1)$ точки. По предположению индукции, из такого многограиника мы можем вырезать многогранник объема $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, ие содержащий отмеченных точек, что и доказывает утверждение задачи.

Виимание! Тот факт, что через две точки, взятые внутри выпуклого многогранника, можно провести плоскость, делящую многогранник на два равновелнких, не так-то уж и очевиден. Подумайте, в чем тут дело, и попробуйте строго обосиовать его.

Л. Липов

◆

Ф378. *Пассажиры самолета не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?*

На пассажира самолета, летящего с горизонтальным ускорением **a**, со стороны кресла действуют две снлы: горизонтальная сила $m\mathbf{a}$ и вертикальная сила $-m\mathbf{g}$, компенсирующая силу тяжести. Такие же по абсолютной величине силы, но направленные в противоположные стороиы, действуют (по третьему закону Ньютоиа) со стороны пассажира иа кресло. Абсолютная величина результирующей силы, действуюшей на опору, т. е. вес пассажира, есть

$$P=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}.$$

По условию задачи

$$P\leqslant 2mg.$$

Отсюда

$$a\leqslant\sqrt{3}\,g.$$

С. Козел

◆

Ф379. *Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки существенно боль-*

Обозначим через AO радиус канала капиллярной трубки (рис. 10). Рассмотрим ход такого луча AB, который после преломления на внешней поверхности капилляра пойдет

ше диаметра канала. Показатель преломления стекла $n=4/3$. Видимый через боковую поверхность трубки диаметр канала $d'=2{,}66$ мм. Определить истинный диаметр канала.

Рис. 10.

параллельно оптической оси OC. Очевидно, что именно этот луч определяет линейный размер d' изображения канала капиллярной трубки.

Из рисунка 10

$$\frac{d'}{2}=\frac{D}{2}\sin\beta,$$

где D — внешний диаметр трубки. По закону преломления

$$\sin\beta = n\sin\alpha \text{ и } d' = Dn\sin\alpha.$$

Из треугольника AOB по теореме синусов получаем

$$\frac{d/2}{\sin\alpha}=\frac{D/2}{\sin(90^\circ+\beta-\alpha)}.$$

Отсюда

$$d=D\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ+\beta-\alpha)}=D\frac{\sin\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}=$$

$$=\frac{d'}{n}\,\frac{1}{\cos(\beta-\alpha)}.$$

Поскольку внешний диаметр D трубки существенно больше диаметра d канала, угол α мал. Следовательно, мал и угол β, и разность $\beta-\alpha$. Тогда $\cos(\beta-\alpha)\approx 1$, и окончательно

$$d\approx d'/n=2 \text{ мм}.$$

Е. Кузнецов

◆

Ф380. *Найти период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 11. Стержни считать невесомыми, их длины l_1 и l_2, массы шаров m_1 и m_2.*

Описанная в условии система представляет собой физический маятник. Нахождение периода колебаний физического маятника — задача достаточно сложная. Дело в том, что период зависит от формы физического маятника, его конфигурации. Но для любого физического маятника можно подобрать такой математический маятник, период колебаний которого будет равен периоду колебаний данного физического маятника. Так мы и поступим: подберем математический маятник, «эквивалентный» системе, изображенной на рисунке 11.

Период малых колебаний математического маятника зависит только от его длины. Так что нам достаточно найти длину «эквивалентного» математического маятника — так называемую приведенную длину физического маятника.

На рисунке 11 показано положение равновесия нашей системы. При этом центр тяжести системы (точка M) находится на вертикали, проходящей через центр вращения O; $\mathbf{d}$ — радиус-вектор точки M относительно O. Пусть l — приведенная длина физического маятника. Если при колебаниях угловые скорости ω и ω' вращения векторов $\mathbf{d}$ и $\mathbf{l}$ вокруг точки O одинаковы, то и периоды колебаний маятников одинаковы. Найдем ω и ω'.

Пусть φ — максимальный угол отклонения радиуса-вектора $\mathbf{d}$ от вертикали. Найдем угловую скорость точек системы в тот момент, когда радиус-вектор $\mathbf{d}$ составляет угол θ с вертикалью. Потенциальная энергия системы в момент максимального отклонения равна (рис. 12)

$$\Pi_\varphi=(m_1+m_2)\,gh_\varphi=(m_1+m_2)\,gd\,(1-\cos\varphi).$$

(Потенциальная энергия системы в положении равновесия принята равной нулю.) В момент отклонения на угол θ потенциальная энергия равна

$$\Pi_\theta=(m_1+m_2)\,gh_\theta=(m_1+m_2)\,gd\,(1-\cos\theta),$$

а кинетическая энергия равна

$$K_\theta=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2},$$

где $v_1 = \omega l_1$ и $v_2 = \omega l_2$ — линейные скорости шарнков в этот момент. Согласно закону сохранения энергии $K_\theta = П_\varphi - П_\theta$, т. е.

$$\frac{m_1\omega^2 l_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2 l_2^2}{2} = (m_1 + m_2)\, gd\, (\cos\varphi - \cos\theta),$$

откуда

$$\omega = \sqrt{2gd\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\,(\cos\varphi - \cos\theta)}\,. \qquad (1)$$

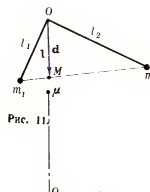


Рис. 11.

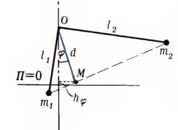


Рис. 12.

Для математического маятника (точка массы μ, подвешенная на нити длиной l) потенциальная энергия в момент максимального отклонения на угол φ равна (рис. 13)

$$П'_\varphi = \mu g l\,(1 - \cos\varphi).$$

При отклонении на угол θ —

$$П'_\theta = \mu g l\,(1 - \cos\theta),$$

$$K'_\theta = \mu\frac{(v')^2}{2} = \mu\,\frac{(\omega')^2 l^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии

$$\mu g l\,(1 - \cos\theta) + \mu\,\frac{(\omega')^2 l^2}{2} = \mu g l\,(1 - \cos\varphi)$$

найдем ω':

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\theta)}\,. \qquad (2)$$

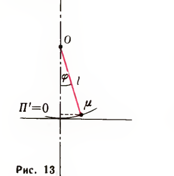


Рис. 13

Из (1) и (2) видно, что если подобрать математический маятник такой длины l, чтобы

$$\frac{2g}{l} = 2gd\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2},$$

то колебания этого маятника будут синхронны колебаниям системы, изображенной на рисунке 11.

Итак, приведенная длина физического маятника равна

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{d\,(m_1 + m_2)}\,. \qquad (3)$$

Найдем теперь расстояние d от центра качаний O до центра тяжести системы. Пусть α — угол, который в положении равновесия образует стержень длины l_1 с вертикалью (рис. 14). Тогда $m_1 g r_1 = m_2 g r_2$, или

$$m_1 g l_1 \sin\alpha = m_2 g l_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = m_2 g l_2 \cos\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1},\quad \sin\alpha = \frac{m_2 l_2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{m_1 l_1}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}.$$

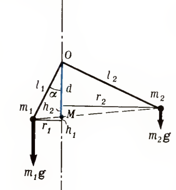


Рис. 14.

Потенциальную энергию системы в положении равновесия мы приняли равной нулю. Это означает, что $m_2 g h_2 - m_1 g h_1 = 0$ (см. рис. 14), т. е.

$$m_1 g\,(d - l_1\cos\alpha) + m_2 g\,(d - l_2\sin\alpha) = 0.$$

Из последнего равенства, подставив найденные выражения для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, найдем

$$d = \frac{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение для d в формулу (3), найдем приведенную длину физического маятника:

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}.$$

Таким образом, период свободных колебаний системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}}.$$

Т. Петрова

Ф381. *В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами $A_1 = 39$ и $A_2 = 41$ сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению их движения (рис. 15). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения u_0 на величину $\pm \Delta u$. С какой относительной точностью $\frac{\Delta u}{u_0}$ нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?*

Рис. 15.

◆

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, перпендикулярная скорости частицы и равная по абсолютной величине qvB. Здесь q — заряд частицы, v — ее скорость, B — индукция магнитного поля. В однородном магнитном поле частица будет двигаться по окружности, радиус R которой можно найти из второго закона Ньютона:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB, \quad \text{и} \quad R = \frac{mv}{qB},$$

где m — масса частицы. Если воспользоваться законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = qu,$$

то радиус траектории можно выразить через ускоряющий потенциал u:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2um}{q}}.$$

Это соотношение показывает, что радиус траектории зависит от произведения um. При изменении ускоряющего потенциала радиус траектории каждого из пучков калия будет изменяться (см. рис. 15). Чтобы пучки ионов не перекрывались, необходимо выполнение следующего условия:

$$(u_0 + \Delta u)m_1 < (u_0 - \Delta u)\, m_2,$$

или

$$m_1 + \frac{\Delta u}{u_0} m_1 < m_2 - \frac{\Delta u}{u_0} m_2,$$

где m_1 и m_2 — массы ионов калия, пропорциональные атомным весам A_1 и A_2 соответственно. Отсюда

$$\frac{\Delta u}{u_0} < \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} = 0{,}025 = 2{,}5\%.$$

Заметим, что современная экспериментальная техника позволяет фиксировать ускоряющий потенциал с гораздо более высокой точностью (на несколько порядков).

С. Козел

Ф382. ***Найти радиус наибольшей капли воды, которая может испариться, не поглотив тепла извне.***

При испарении капли без поглощения тепла извне необходимое для испарения количество теплоты Q получается за счет уменьшения поверхностной энергии капли $U_п$ при уменьшении площади ее поверхности.

Пусть радиус капли уменьшился на ΔR, тогда объем капли уменьшился на

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R - \Delta R)^3 =$$

$$= 4\pi R^2 \Delta R - 4\pi R (\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi (\Delta R)^3.$$

При малом ΔR можно пренебречь вторым и третьим членами этого равенства по сравнению с первым членом, так что

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R.$$

Масса испарившейся при этом воды равна

$$m = \rho \Delta V = 4\pi \rho R^2 \Delta R.$$

Для ее испарения необходимо количество теплоты

$$Q = Lm = 4\pi L \rho R^2 \Delta R$$

где $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг* — удельная теплота парообразования воды. Площадь поверхности капли уменьшилась на

$$\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi (R - \Delta R)^2 = 8\pi R \Delta R$$

(членом, содержащим $(\Delta R)^2$, мы пренебрегаем), поэтому поверхностная энергия уменьшилась на

$$\Delta U_п = 8\pi R \Delta R \sigma,$$

где $\sigma = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ *дж/м²* — коэффициент поверхностного натяжения воды.

Приравняем выражения для Q и $\Delta U_п$:

$$4\pi L \rho R^2 \Delta R = 8\pi R \Delta R \sigma,$$

откуда

$$R = \frac{2\sigma}{\rho L} \sim 10^{-10}\ м = 10^{-8}\ см.$$

Такая капля существовать не может, так как мы получили, что R порядка межмолекулярных расстояний в воде. Следовательно, никакая капля не может испариться, не поглощая тепла извне.

При решении задачи мы предполагали, что температура капли и, следовательно, ее внутренняя энергия не изменяются. Это изменение можно, в принципе, учесть, но это не изменит ответ. Действительно, удельная теплоемкость воды равна 1 *кал/г·град*, а удельная теплота парообразования — 539 *кал/г·град*. Следовательно, если температура капли комнатная (20°C), то при охлаждении ее до 0°C может испариться примерно $\frac{20}{539} \approx 0{,}04$ массы капли. Поэтому ясно, что учет изменения внутренней энергии капли не может изменить ответ.

И. Слободецкий

Как устроено атомное ядро

(Начало см. с. 30)

...Воображению приходится особенно тяжко, когда стараешься представить строение ядра тяжелого атома. Как нам говорят, в ядре каждого атома присутствует компактное образование из протонов (число которых соответствует числу электронов на орбитах вокруг ядра) и нейтронов (необходимых для объяснения существования протонов и других надобностей). Однако протоны, будучи заряжены положительно, должны испытывать отвращение к себе подобным и избегать тесной близости с ними аналогично электронам. Как можно представить их упакованными вместе?

Ответ профессора Андраде не заставил себя ждать:

«Полковник Мур-Брабазон, стараясь идти в ногу со временем, задает капитальные вопросы относительно таких современных фундаментальных понятий физики, как протон и нейтрон.

(Продолжение см. с. 55)

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М366—М375 и Ф373—Ф382 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Почти все читатели, приславшие нам решения задач **М366, М371, М374**, успешно справились с этими задачами. Остальные задачи решили: *Г. Аветисян* (Акаран Арм. ССР) **2**; *А. Алексеев* (Пермь) **7, 8, 5**; *Б. Аронов* (Саратов)**3а), б)**; *К. Аршалян* (Очамчира) **5**; *Г. Атоян* (Чаренцаван) **5**; *В. Батырев* (Москва) **9**; *А. Бер* (Ташкент) **7, 5**; *П. Билер* (ПНР) **7, 8, 0, 2, 5**; *И. Билецкий* (Рогатин) **2**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **5**; *Б. Блок* (Москва) **7, 8, 3а), 5**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **5**; *А. Варламов* (Ленинград) **8**; *А. Воронков* (Кемерово) **8**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкин Гродненской обл.) **7, 0, 5**; *И. Гандельсман* (Ленинград) **5**; *А. Гатилов* (Воронеж) **5**; *М. Гершенгорин* (Харьков) **8, 0**; *Б. Гисин* (Ленинград) **3а), б), 5**; *Г. Гительсон* (Ленинград) **3а), 5**; *Е. Глезин* (Ленинград) **3а), б)**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **7**; *И. Гонин* (Томск) **3а)**; *А. Грицук* (Дрогичин) **7**; *С. Гришечкин* (Москва) **2, 3а), б)**; *В. Гроссман* (Одесса) **0**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **2, 3а), б), 5**; *Э. Гузовский* (Минск) **2**; *А. Диденко* (Краснодар) **3а)**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **7**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **2**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **8, 0**; *И. Калика* (Киев) **2, 3а)**; *Ю.* и *Я. Камень* (Днепропетровск) **8**; *А. Кирилов* (Ленинград) **0, 2, 5**; *В. Книжник* (Москва) **3а)**; *Л. Корельштейн* (Москва) **3а), б), 5**; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) **7**; *М. Кузнецов* (Камышин) **5**; *Г. Куликови* (Егорьевск) **8**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **3а)**; *С. Лавренченко* (Москва) **2, 3а)**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **0**; *Р. Леманн* (ГДР) **8**; *Я. Логвинович* (с. Дивины Брестской обл.) **7**; *В. Любимов* (Харьков) **7, 0, 2, 3а), 5**; *В. Медведь* (Молодечно) **0, 3а), б)**; *С. Мелихов* (Донецк) **7, 9, 0**; *А. Морозов* (Москва) **8**; *В. Мысик* (Донецк) **9**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **8, 2, 3а), 5**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **2, 5**; *О. Окунев* (Казань) **0**; *Д. Папуш* (Харьков) **7**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **2**; *А. Полев* (Н. Тагил) **5**; *С. Полыгалов* (Пермь) **5**; *А. Радул* (Кишинев) **7, 9, 0, 5**; *А. Разборов* (Москва) **3а), б)**; *В. Решетов* (Троицк) **0, 3а)**; *А. Родников* (Москва) **9**; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) **8**; *Д. Самощенко* (Свердловск) **7**; *Э. Свылан* (Рига) **7, 0**; *М. Селектор* (Ленинград) **8, 0, 3а), б) 5**; *Н. Тренев* (Москва) **8, 0, 5**; *В. Трофимов* (Москва) **3а), б)**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **7—0, 2, 3а), 5**; *В. Угриновский* (Хмельник) **9**; *В. Фалько* (Харьков) **5**; *И. Царьков* (Москва) **3а), б)**; *А. Цуканов* (Тарту) **2**; *Ю. Шмидт* (Алма-Атинский табак-совхоз) **7**; *В. Шумилов* (Череповец) **3а)**; *Л. Энтин* (Москва) **3а), б)**; *В. Ясинский* (Винница) **5**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф378** и **Ф381**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **3**; *Г. Айзин* (Брест) **3, 4, 7**; *Е. Алексеев* (Москва) **2**; *А. Алмазов* (Пушкин) **5**; *В. Андреев* (Ленинград) **3, 5, 7, 9, 0**; *С. Антонюк* (Киев) **9**; *М. Бабаев* (Баку) **3**; *А. Бабанин* (Жданов) **4, 2**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **3, 9**; *А. Байменов* (Джетысай) **9**; *К. Балашов* (д. Клишева Московской обл.) **9**; *С. Балашов* (Москва) **4, 7, 9**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **4**; *А. Бахиров* (Ленинград) **2**; *В. Бегларян* (Калинин) **9, 0**; *Г. Бежиашвили* (Рустави) **0**; *Т. Бейко* (Киев) **4**; *А. Беликов* (Москва) **3, 4**; *Н. Беляева* (Алма-Ата) **4**; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) **4, 9**; *П. Билер* (Вроцлав, ПНР) **0**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **3**; *А. Бондарев* (Львов) **4, 0**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **6, 7**; *О. Будиловский* (Киев) **3, 5**; *В. Буртовой* (Килия) **7, 9, 0, 2**; *М. Вардиашвили* (Тбилиси) **3**; *Б. Васиев* (Самарканд) **3, 4, 9**; *А. Вечер* (Минск) **2**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **5—7, 9**; *Б. Гайфуллин* (Салават) **7**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **3, 4**; *В. Гаркавый* (Лида) **5**; *В. Гармаш* (Запорожье) **3—5**; *Ф. Гезаков* (Тбилиси) **9**; *А. Гетман* (Моздок) **3, 4, 7**; *Р. Гибадуллин* (*Бугульма*) **3, 4**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **9**; *О. Годин* (Симферополь) **3, 9, 0**; *Ю. Гончаров* (Ставрополь) **9**; *А. Грайфер* (Запорожье) **4, 5**; *А. Грицук* (Дрогичин) **3**; *В. Гурьянов* (Канаш) **5**; *С. Дваренас* (Клайпеда) **3—5**; *К. Дежурко* (д. Полторановичи Брестской обл.) **7**; *П. Демкин* (Донецк) **3, 4**; *С. Дохоян* (Ереван) **0**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **7**; *В. Житарь* (Кишинев) **0**; *В. Жуков* (Абаза) **4, 7**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **3, 5, 0**; *М. Заржевский* (Москва) **3**; *В. Засимчук* (Киев) **4, 9**; *А. Захаров* (Брест) **2**; *И. Ивашков* (Челябинск) **4**; *И. Ильинский* (Ленинград) **9**; *И. Ихсанов* (р. п. Лапшево ТАССР) **9**; *В. Казаков* (Омск) **2, 3, 5**; *А. Караджев* (Москва) **3**; *Р. Кашаева* (Волжский) **9**; *В. Киреев* (Саратов) **9**; *В. Кириаков* (Тбилиси) **4**; *М. Кирсанов* (Тула) **4, 2**; *И. Кирюшин* (Ивано-Франковск) **2**; *Ю. Кленов* (Целиноград) **3, 2**; *А. Козодой* (Челябинск) **9**; *В. Конотоп* (Харьков) **3—5**; *К. Копейкин* (Ленинград) **4—7**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **3, 4**; *С. Кулагин* (Москва) **9**; *С. Курдюков* (Москва) **3, 0**; *Ю. Лебединский* (Могилев) **3—5**; *А. Лебедь* (Днепропетровск) **3—5, 7**; *Р. Леманн* (Петерхаген, ГДР) **0**; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) **7, 0**; *О. Лищенко* (Киев) **3—6, 9, 0, 2**; *В. Лобзин* (Свердловск) **3, 9**;

(Окончание см. с. 80)

В. Гутенмахер,
Б. Ивлев,
Ж. Раббот

Сложение гармонических колебаний

В п. 80 § 16 учебника «Алгебра и начала анализа 10» понятие гармонического колебания вводится на примере движения шарика, прикрепленного к двум горизонтальным пружинам (рис. 1). О физических процессах, в которых естественно возникают гармонические колебания, мы здесь говорить не будем. Наша цель — разобраться со сложением гармонических колебаний одинаковой частоты.

Как мы уже отметили (рис. 1), гармоническое колебание можно представить как колебание точки около начала координат O вдоль оси Ox. График этого движения такой же, как у функции

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Наибольшее отклонение точки $x(t)$ от точки O в процессе колебания равно, разумеется, числу $|A|$ и называется *амплитудой* колебания. *Период колебания* равен $\frac{2\pi}{|\omega|}$. Величина $|\omega|$ называется *частотой* колебания. Начальное положение точки $x(t)$ (в момент времени $t = 0$) задается величиной $A\cos\varphi$.

Разумеется, одно и то же гармоническое колебание может быть задано различными формулами.

На примере движения колеблющихся точек поясним, что означает сложение двух гармонических колебаний. Если одна точка x_1 с начальным положением на оси Ox $A_1\cos\varphi_1$ совершает колебание по закону $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, а другая точка x_2 с начальным положением $A_2\cos\varphi_2$ — по закону $x_2(t) = A_2(\cos\omega_2 t + \varphi_2)$, то суммой этих колебаний будет колебание некоторой точки x с начальным положением $A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$ по закону $x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Оказывается, что если точки x_1 и x_2 колеблются с одинаковой частотой $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то суммой их будет также гармоническое колебание той же частоты ω. Этот факт в п. 82 § 16 учебника выводится из того, что сумма двух решений дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 y$ — снова решение этого уравнения (а все его решения имеют вид $y = A\cos(\omega t + \varphi)$. А нельзя ли получить этот результат как-нибудь попроще, не зная дифференциальных уравнений?

Можно попробовать складывать гармонические колебания графически. На рисунке 2 изображены графики двух функций с одинаковым периодом: $y = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y = \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. По этим двум графикам совсем непонятно, что их сумма $y = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ будет гармоническим колебанием. Так что, как видим, это не очень-то удобно.

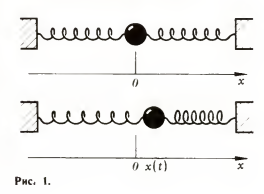


Рис. 1.

В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, гораздо проще проиллюстрировать сложение гармонических колебаний с помощью их *векторных диаграмм*. Объясним, что это такое.

Прежде всего условимся гармоническое колебание записывать в виде $A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A > 0$, $\omega > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi[$. К такому виду мы можем привести любое гармоническое колебание. Рассмотрим теперь некоторую систему координат XOY и возьмем окружность радиуса A с центром O в начале координат (напомним, что A выбрано положительным). Предположим, что по этой окружности против часовой стрелки движется некоторая точка $P(t)$ — ее положение зависит от времени t, — так, что вектор $\overrightarrow{OP}(t)$ вращается равномерно, проходя ω радиан за единицу времени (ω выбрано положительным). Допустим, что в начальный момент времени ($t = 0$) вектор $\overrightarrow{OP}(0)$ составляет с положительным направлением оси OX угол φ ($\varphi \in [0, 2\pi[$), то есть, что координаты точки $P(0)$ — это $(A\cos\varphi;\ A\sin\varphi)$. Тогда угол, который образует вектор $\overrightarrow{OP}(t)$ с положительным направлением оси OX в момент времени t, равен $\omega t + \varphi$, так что координаты вектора $\overrightarrow{OP}(t)$ — это $(A\cos(\omega t + \varphi);\ A\sin(\omega t + \varphi))$, и мы получаем, что проекция точки $P(t)$ на ось OX и проекция точки $P(t)$ на ось OY совершают гармонические колебания, имеющие одинаковые амплитуды и частоты! Поэтому гармоническое колебание точки, например, на оси OX, можно интерпретировать как колебание проекции некоторого вектора $\overrightarrow{OP}(t)$, равномерно вращающегося вокруг точки O, на ось OX. Начальное положение вектора $\overrightarrow{OP}(t)$, то есть $\overrightarrow{OP}(0)$, определяет амплитуду колебания (она равна длине вектора $\overrightarrow{OP}(0)$) и начальную фазу $\varphi = (\overrightarrow{OP}(0), \widehat{\ \overrightarrow{OX}})$; — нет только частоты. Вектор $\overrightarrow{OP}(0)$ и называется *векторной диаграммой* гармонического колебания с амплитудой A и начальной фазой φ.

Задача 1. Нарисуйте векторные диаграммы следующих гармонических колебаний:

а) $-3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $3\cos\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$;

в) $3\cos\left(-2t + \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; е) $3\sin\left(-2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

С помощью векторных диаграмм разобраться со сложением гармонических колебаний уже легко. Нарисуем векторные диаграммы двух гармонических колебаний (одинаковой частоты!): векторы $\overrightarrow{OP}_1$ и $\overrightarrow{OP}_2$ (рис. 3). Тогда векторной диаграммой суммы этих колебаний будет вектор $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2$. В самом деле,

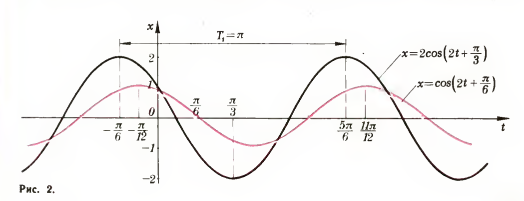


Рис. 2.

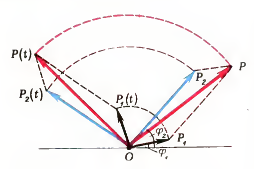


Рис. 3.

проекции векторов $\vec{OP}_1(t)$ и $\vec{OP}_2(t)$ на ось OX записываются так:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где $A_1 = |\vec{OP}_1|$, $\varphi_1 = (\widehat{\vec{OP}_1, \vec{OX}})$;

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где $A_2 = |\vec{OP}_2|$, $\varphi_2 = (\widehat{\vec{OP}_2, \vec{OX}})$. Проекция на ось OX их суммы $\vec{OP}(t) = \vec{OP}_1(t) + \vec{OP}_2(t)$ равна $x_1 + x_2$, то есть $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, так что вектор $\vec{OP}$ в самом деле является векторной диаграммой для суммы наших гармонических колебаний.

Заметим теперь, что вектор $\vec{OP}(t)$ — диагональ параллелограмма со сторонами $OP_1(t)$ и $OP_2(t)$ (см. рис. 3). Поскольку векторы $\vec{OP}_1(t)$ и $\vec{OP}_2(t)$ вращаются с одинаковой угловой скоростью, весь параллелограмм вращается как жесткая фигура. Поэтому и диагональ его вращается с той же угловой скоростью ω, так что проекция вектора $\vec{OP}(t)$ на ось OX (абсцисса точки $P(t)$) совершает гармоническое колебание с той же частотой ω, что и проекции векторов $\vec{OP}_1(t)$ и $\vec{OP}_2(t)$ на ось OX (абсциссы точек $P_1(t)$ и $P_2(t)$).

Ясно, как вычислить амплитуду и начальную фазу этой суммы (амплитуда — это длина диагонали параллелограмма, а начальная фаза — угол, который эта диагональ составляет с осью OX — см. задачу № 260 на с. 59 учебника).

Задача 2. Изобразите векторные диаграммы суммы колебаний а) и б), г) и е) из задачи 1 и найдите их амплитуды и начальные фазы.

С помощью векторных диаграмм можно доказать еще одно важное утверждение, именно, что *всякое гармоническое колебание можно представить формулой* $f(t) = a \cos \omega t - b \sin \omega t$. Остановимся на этом подробнее.

Пусть у нас есть гармоническое колебание $A \cos(\omega t + \varphi)$ с частотой ω, и пусть $\vec{OP}(0) = (A \cos \varphi;\ A \sin \varphi)$ — его векторная диаграмма в системе координат XOY. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, задающие систему координат XOY (см. п. 70 § 14 учебника «Алгебра и начала анализа, 9»). Тогда $\vec{OP}(0) = A \cos \varphi \cdot \vec{i} + A \sin \varphi \cdot \vec{j}$. Допустим теперь, что векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равномерно и одновременно с вектором $\vec{OP}(t)$ вращаются вокруг точки O с той же угловой скоростью ω, что и вектор $\vec{OP}(t)$. Тогда $\vec{i}(t) = (\cos \omega t;\ \sin \omega t)$, $\vec{j}(t) = (-\sin \omega t;\ \cos \omega t)$. Поскольку векторы $\vec{OP}(t)$, $\vec{i}(t)$ и $\vec{j}(t)$ вращаются как жесткая фигура, и в начальный момент времени $\vec{OP}(0) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ ($a = A \cos \varphi$, $b = A \sin \varphi$), то в момент времени t x-я координата, то есть число $A \cos(\omega t + \varphi)$, вектора $\vec{OP}(t)$ будет равна сумме x-х координат векторов $a \cdot \vec{i}(t)$ и $b \cdot \vec{j}(t)$, то есть $A \cos(\omega t + \varphi) = a \cos \omega t - b \sin \omega t = A(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t)$.

Таким образом, мы представили гармоническое колебание $A \cos(\omega t + \varphi)$ в виде суммы двух также гармонических колебаний той же частоты ω: $a \cos \omega t$ и $-b \sin \omega t$ (ведь график синуса — это сдвинутый по фазе на четверть периода график косинуса.



Г. Перевалов

Графическое задание функции

Летом этого года на вступительном устном экзамене по математике в одном из вузов между экзаменатором (Э) и абитуриентом (А) произошел следующий разговор.

Э. Какие способы задания функции вы знаете?

А. Существует три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

Э. Приведите пример функции, заданной графическим способом.

А (после некоторой паузы). Это что, надо построить график функции? А какой функции?

Э. Речь идет не о построении графика функции, заданной, например, с помощью формулы, а о самом задании функции с помощью графика. Ведь вы только что сказали, что функция может быть задана графически. Вот и требуется задать, определить какую-нибудь функцию графически.

А ... (молчит).

Э. Вспомните, что значит задать функцию.

А. Чтобы задать функцию, надо взять два множества — множество X и множество Y — и указать такое соответствие между ними, при котором каждому $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент из множества Y.

Э. Хорошо. А теперь возьмите координатную плоскость — на листе бумаги нарисуйте прямоугольную систему координат и на каждой оси отметьте единицу измерения. Далее, на оси Ox возьмите какой-нибудь отрезок — это будет множество X, а на оси Oy — другой отрезок — множество Y. Для определения функции осталось только определить соответствие между этими множествами. Как это можно сделать?

А. Соответствие можно задать с помощью формулы.

Э. А графически как задать? Нас же интересует именно этот способ.

А... (молчит).

Не будем дальше приводить этот разговор. Поставленная задача оказалась для абитуриента непосильной. Затруднения у абитуриентов вызывают и другие «графические» вопросы, т. е. вопросы, связанные с графиками функций — описание свойств функции по ее графику (исследование функции), построение графиков функций путем преобразования данного графика и т. д. Обсуждение таких вопросов и является целью настоящей статьи.

Некоторые напоминания

Нам потребуются два знакомых вам определения. Напомним их и сделаем некоторые замечания.

Первое возьмем из школьного учебника*).

Определение 1. Соответствие между множеством X и множеством Y, при котором каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества Y, называется *функцией*. Множество X называется *областью определения функции*.

Второе — из статьи А. Н. Колмогорова **).

*) Алгебра. Учебное пособие для 6 класса средней школы, под редакцией А. И. Маркушевича (М., «Просвещение», 1976, с. 69).

**) А. Н. Колмогоров. Что такое график функции, «Квант», 1970, № 2.

Определение 2. Пусть на множестве X задана функция $y = f(x)$. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких пар (x, y), что:

1) первый элемент x пары (x, y) принадлежит области определения X функции $y = f(x)$;

2) второй элемент y пары (x, y) есть значение функции $y = f(x)$ в точке x.

Так, для функции $f(x)$, заданной таблицей

x	а	б	в	г	д	е
$f(x)$	2	1	3	2	1	5

графиком будет множество

$$\Gamma_f = \{(а, 2), (б, 1), (в, 3), (г, 2), (д, 1), (е, 5)\}.$$

Для функций с бесконечной областью определения все пары $(x, f(x))$ выписать, естественно, нельзя. Поэтому приходится описывать эти пары иначе. Например, для функции $y = f(x) = x^2$, $x \in R$ график состоит из всевозможных пар действительных чисел вида (x, x^2), т. е из всех пар (x, y), для которых выполнено условие $y = x^2$. Используя обозначения, принятые в теории множеств, определение графика функции $y = x^2$ можно записать в виде формулы

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in R, \ y = x^2\}.$$

А общее определение графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, можно записать в виде следующей формулы:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in X, \ y = f(x)\}.$$

Далее мы ограничимся числовыми функциями. У числовых функций $y = f(x)$ область определения состоит из действительных чисел, значения этих функций также являются действительными числами, а график состоит из всех пар (x, y) действительных чисел x и y, для которых выполняется условие $y = f(x)$.

Напомним, что множество всех пар (x, y) действительных чисел x и y называется *числовой плоскостью* и обозначается символом R^2, а любое подмножество точек числовой плоскости называется *геометрической фигурой*. Геометрической фигурой будет, например, ось Ox, т. е. множество точек

$$\{(x, y) \mid x \in R, \ y = 0\}.$$

График числовой функции $y = f(x)$ также будет фигурой числовой плоскости R^2.

Точки и геометрические фигуры числовой плоскости (в частности, графики числовых функций) можно наглядно изображать на чертеже. Для этого строим координатную плоскость и на ней точкой с координатами x, y изображаем точку $(x; y)$ числовой плоскости.

Согласно определению 1 каждому элементу $x \in X$ соответствует один и только один элемент y из множества Y, поэтому множество Γ_f — график функции $y = f(x)$ — не должно содержать двух пар с общими первыми элементами и различными вторыми, т. е. на графике числовой функции не должно быть двух точек с одинаковыми абсциссами и различными ординатами. Этот факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если множество Γ_f есть график числовой функции $y = f(x)$, то каждая прямая, параллельная оси Oy, должна иметь не более одной общей точки с множеством Γ_f.*

После этих предварительных замечаний обратимся к поставленным в начале вопросам.

Графический способ задания функции

Возьмем на координатной плоскости точку $(x; y)$. Будем считать, что точка $(x; y)$ числу x — абсциссе точки — ставит в соответствие число y — ординату точки.

Теперь на координатной плоскости возьмем некоторое точечное множество M, т. е. множество пар $(x; y)$ действительных чисел x и y. Множество всех абсцисс x точек $(x; y) \in M$

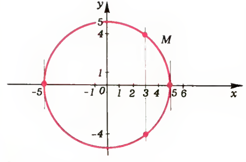


Рис. 1.

обозначим через $X = \{x\}$, множество всех ординат y этих точек — через $Y = \{y\}$. Будем считать, что множество M числу $x \in X$ ставит в соответствие все те числа $y \in Y$, которые являются ординатами точек $(x; y) \in M$ (т. е. точек, имеющих одну и ту же абсциссу, равную x). Тогда говорят, что *точечное множество* M *задает соответствие* f *между множествами* X *и* Y. Само же множество M называют *графиком соответствия* f.

Например, на рисунке 1 множество M — окружность радиуса 5 с центром в начале координат. Эта окружность задает соответствие между отрезком $[-5; 5]$ на оси Ox и отрезком $[-5; 5]$ на оси Oy. Точке 3 на оси Ox соответствуют 4 и -4 на оси Oy, точке 5 на оси Ox — точка 0 на оси Oy и т. д.

Когда соответствие f, заданное множеством M на координатной плоскости, будет функцией? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к определению функции. Из него сразу следует, что соответствие f, определяемое множеством M, будет функцией, если каждой абсциссе $x \in X$ соответствует е д и н с т в е н н а я ордината $y \in Y$. Получаем теорему, обратную теореме 1.

Т е о р е м а 2. *Если точечное множество* M *на координатной плоскости таково, что каждая прямая, параллельная оси* Oy, *пересекает его не более чем в одной точке, то множество* M *есть график некоторой функции* $y = f(x)$.

Объединяя теоремы 1 и 2, получим следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы множество* M *на координатной плоскости являлось графиком некоторой функции (определяло функцию) необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси* Oy, *пересекала его не более одного раза* (имела с M не более одной общей точки).

Теперь мы видим, что множество M на рисунке 1 функцию не определяет — прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку (3,0), пересекает множество M в двух точках; то же самое верно и для всех других точек интервала $]-5; 5[$.

А вот соответствие f между множествами $X = [1; 5]$ на оси Ox и $Y = [1; 3]$ на оси Oy, определенное множеством M на рисунке 2, является функцией,—каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает множество M не более чем в одной точке.

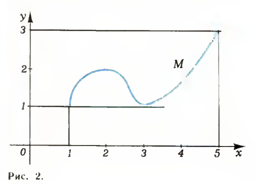


Рис. 2.

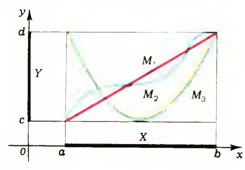




Рис. 3.

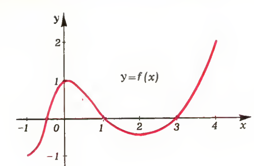


Рис. 4.

Заметим, что для данных множеств $X \subset (Ox)$, $Y \subset (Oy)$ можно построить бесконечно много функций с областью определения X, принимающих значения в Y. Так, на рисунке 3 каждая из трех кривых является графиком некоторой функции с областью определения $[a; b] \subset (Ox)$, принимающей значения в $[c; d] \subset (Oy)$, т. е. каждая из них определяет функцию графически.

Вот что примерно следует знать абитуриенту по вопросу о графическом задании функции.

Исследование функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Требуется исследовать ее.

Это означает следующее.

1. *Найти область определения функции.*

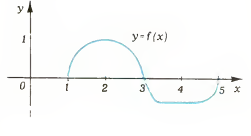
2. *Найти множество значений функции; выяснить, является ли функция ограниченной.*

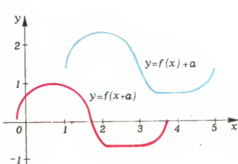
3. *Выяснить, имеет ли функция наибольшее и наименьшее значение.*

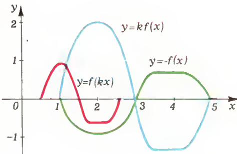
4. *Определить, является ли функция четной (нечетной), периодической.*

5. *Найти промежутки, на которых функция положительна, отрицательна; выяснить, где функция обращается в нуль.*

6. *Найти промежутки возрастания, убывания, постоянства функции.*







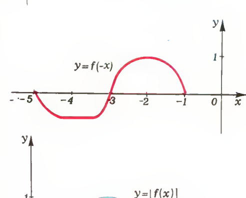


Рис. 5.

$y = f(x) + a$	перенос графика функции $y = f(x)$ на a единиц вверх (по оси Oy)
$y = f(x + a)$	перенос графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево (по оси Ox)
$y = kf(x)$ $(k > 0)$	сжатие графика функции $y = f(x)$ к оси Ox в отношении $1:k$
$y = -f(x)$	отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox
$y = f(kx)$ $(k > 0)$	сжатие графика функции $y = f(x)$ к оси Oy в отношении $1:(1/k)$
$y = f(-x)$	отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy
$y = \|f(x)\|$	отражение относительно оси Ox частей графика функции $y = f(x)$, лежащих ниже оси Ox

Для такого исследования функции требуются известные определения: четной (нечетной) функции, возрастающей (убывающей) в промежутке функции, ограниченной функции и так далее. Все эти определения обычно используются для исследования функции, заданной формулой (аналитически), но они пригодны для исследования всякой числовой функции, каким бы способом она ни задавалась. Поэтому все определения будут «работать» и для функций, заданных графически. (Надо только учитывать, что каждое изображение графика функции — скажем, карандашом на бумаге — приблизительное и дает лишь общее представление о функции, не позволяя точно определить значение функции в данной точке.) Рассмотрим один пример.

На рисунке 4 задана функция $y = f(x)$. Исследуем ее по приведенной схеме.

1. Область определения функции $f: X = [-1; 4]$.

2. Множество значений функции $f: Y = [-1; 2]$. Функция f ограничена, так как для всех $x \in X$ будет $|f(x)| \leqslant 2$.

3. Наибольшее значение функция f принимает в точке $x = 4$, $f(4) = 2$, наименьш — в точке $x = -1$, $f(-1) = -1$.

4. Функция f не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения X несимметрична относительно начала координат (впрочем, этот вывод не изменится, если огра-

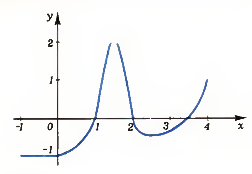


Рис. 6.

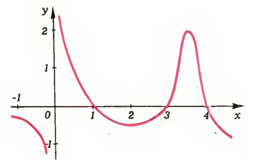


Рис. 7.

ничить область определения функции f промежутком $[-1;\ 1]$, так как $f(-1)=-1$, $f(1)=0$, и $f(1)\neq f(-1)$, $f(1)\neq -f(-1)$. Функция f непериодическая, так как ее область определения ограничена.

5. Функция f положительна в промежутках $]-\frac{1}{2};\ 1[$ и $]3;\ 4]$, отрицательна в промежутках $[-1;\ -\frac{1}{2}[$ и $]1;\ 3[$. В точках $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ и $x=3$ функция обращается в нуль.

6. Функция f возрастает в промежутках $[-1;\ 0]$ и $[2;\ 4]$ и убывает в промежутке $[0;\ 2]$.

Так проводится исследование функции по ее графику.

Построение графиков функций с помощью преобразования данного графика

Путем преобразования графика функции $y=\sin x$ вы в 10 классе получали графики функций $y=A\sin(kx+\theta)$, где A, k, θ — действительные числа. Точно так же путем преобразования графика функции $y=f(x)$ можно строить графики ряда других функций. Пусть функция $y=f(x)$ задана своим графиком. По этому графику абитуриент должен уметь строить графики следующих функций: $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=kf(x)$, $y=f(kx)$, $y=|f(x)|$ (a, k — действительные числа), а также графики функций, получающиеся при различных комбинациях этих преобразований (типа $y=kf(x+a)$ и т. п.). Геометрические преобразования графика функции $y=f(x)$, при которых получаются графики приведенных выше функций, собраны в таблице (см. с. 51 и рис. 5).

Описание способов построения графиков функций читатель может найти в пособиях по математике, например: Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике. М., «Наука», 1976.

Упражнения

1. Исследовать функцию $y=f(x)$, заданную графически (рис. 6).

2. Дан график функции $y=f(x)$ (рис. 7). Построить графики функций: а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x+2)$; в) $y=-f(x)$; г) $y=2f(x)$; д) $y=f(2x)$; е) $y=|f(x)|$; ж) $y=f(-x)$.

3. Дана функция $y=f(x)$. Построить графики функций, перечисленных в упражнении 2, если: а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=10^x$; в) $f(x)=\lg x$; г) $f(x)=\sin x$.

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Завод-втуз при автозаводе им. И. А. Лихачева является новым типом высшего учебного заведения, органически сочетающий в своей программе теоретическую и производственную подготовку специалистов высшей квалификации. Институт готовит инженеров для производственного объединения ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ и их филиалов, расположенных в 15 городах Советского Союза.

Завод-втуз при ЗиЛе имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний. Автомобильный факультет готовит инженеров-механиков по проектированию и исследованию автомобилей, автомобильных поршневых двигателей и автомобильных кузовов, причем подготовка инженеров по специальности автомобильные кузова является единственной в Советском Союзе. К автомобильному факультету относятся следующие специальности.

1. Автомобили и тракторы со специализацией автомобильные кузова.
2. Двигатели внутреннего сгорания.
3. Машины и технология обработки металлов давлением.
4. Машины и технология сварочного производства.
5. Экономика и организация машиностроительной промышленности.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-механиков по специальностям.

1. Металловедение, оборудование и технология термической обработки металлов.
2. Технология машиностроения, станки и инструменты со специализациями:

а) технология машиностроения;
б) инструментальное производство;
в) ремонт и модернизация металлорежущего оборудования;
г) электрофизические и электрохимические методы обработки металлов.

3. Машины и технология литейного производства.
4. Автоматизация и комплексная механизация машиностроения.

Вечерний факультет готовит инженеров-механиков по вышеперечисленным специальностям.

Подготовка специалистов высшей квалификации осуществляется высококвалифицированным профессорско-преподавательским составом с привлечением ведущих специалистов базовых предприятий.

В институте имеется военная кафедра, где по окончании обучения юношам присваивается звание офицера. Все юноши получают права водителей-профессионалов.

Студенты института пользуются всеми льготами, установленными для студентов обычных дневных вузов, а также льготами, представленными для рабочих таких крупных заводов как ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ.

За все время обучения студенты за проработанное время ежемесячно получают 0,5 месячной зарплаты, а за учебное время — 0,5 месячной стипендии, повышенной на 15% по сравнению со стипендией студентов обычных дневных вузов.

В чем же состоит особенность подготовки инженеров по системе «завод-втуз»?

На 1-м курсе дневных факультетов института занятия проводятся как в обычных институтах. Начиная со 2-го курса обучение производится попеременно с отрывом и без отрыва от производственной деятельности с недельным чередованием, т. е. на учебной неделе студенты занимаются в аудиториях института, на следующей рабочей неделе студенты работают на базовых заводах (ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ), участвуя в выпуске основной продукции предприятий. Учебным планом института в разделе производственной подготовки предусмотрено, что на втором и третьем курсах студенты работают на рабочих местах в качестве рабочих в зависимости от выбранной специальности (слесари - сборщики, слесари-ремонтники, станочники, штамповщики и т. д.). Начиная с четвертого курса студенты переводятся на инженерно-технические должности, где они выполняют функции техников, инженеров (технологов, исследователей, конструкторов, испытателей) или функции административно-линейного персонала (мастерами производственных участков, отделений).

На старших курсах под руководством высококвалифицированных преподавателей профилирующих кафедр института студенты проводят самостоятельные научно-исследовательские работы, связанные с решением задач, стоящих перед базовыми заводами.

Программа общетеоретической подготовки инженеров, несмотря на участие в производственном процессе базовых заводов, предусматривает изучение общетеоретических дисциплин в объеме, эквивалентном объему в обычном высшем техническом учебном заведении. Программа же инженерной подготовки по выбранной специальности несколько

сокращена, что оправдывается тем, что студенты часть специальных знаний получают непосредственно на производстве.

Инжеиерам-выпускникам завода-втуза, хорошо изучившим за время обучения организацию и экономику производства значительно легче сразу же включиться в ритм работы производства и активно участвовать в выполнении плановых заданий предприятия.

Как показала практика, наши инженеры-выпускники успешно работают на базовых предприятиях и их филиалах, становятся подлинными руководителями производства, активно решающими задачи научно-технического прогресса.

Так, хотя в этом году завод-втуз выпустил только свой десятый выпуск, среди его питомцев есть директора заводов, заместители директоров, главные механики заводов, заместители главных инженеров, начальники отделов и частей. Только на ЗиЛе более 10 цехов возглавляют выпускники завода-втуза.

Студенты завода-втуза имеют возможность принимать активное участие в спортивной жизни одного из крупнейших спортивных клубов страны «Торпедо» ЗиЛ, спортивных клубах «Москвич» и «Подшипник».

На заводе-втузе ежегодно проводится широкая вузовская Спартакиада, привлекающая к себе практически всех студентов I—V курсов. Студенты соревнуются и на зимней Спартакиаде ЗиЛа, где показывают отличные результаты. Во втузе работают секции волейбола, баскетбола, футбола, гандбола, лыжного спорта, легкой атлетики. Все студенты обучаются плаванию. Студенты, занимающиеся спортом, регулярно соревнуются с командами вузов и производственных коллективов Москвы и других городов. Большая группа студентов входит в состав сборных команд базовых заводов, МГС и ЦС ДСО «Труд». В заводе-втузе обучается ряд студентов, входящих в сборные команды СССР по отдельным видам спорта.

Студенты завода-втуза участвовали в составе сборной команды СССР в олимпийских играх в Монреале.

На дневное отделение института принимаются лица, работающие на базовых заводах (ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ), школьники г. Москвы, направленные на обучение этими заводами, и иногородние абитуриенты, направленные администрацией филиалов базовых заводов. Студентам, направленным на учебу филиалом базовых заводов объединения Авто-ЗиЛ, АЗЛК, а также с КАМАЗа, представляется благоустроенное общежитие.

Поступающие на 1-й курс завода-втуза при ЗиЛе сдают вступительные конкурсные экзамены в объеме программы средней школы по следующим предметам: математика (письменно и устно), физика (письменно) и сочинение.

Вступительные экзамены принимаются в три срока: июль (на вечерние и дневные факультеты), август (на дневные факультеты) и сентябрь (на вечерние факультеты).

Ниже мы приводим варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1976 года.

Математика

Вариант 1

1. Конус, высота которого H и радиус основания R, укреплен в отвесном положении вершиной вниз. В конус налита вода до высоты h и вложен железный шар радиуса r, погрузившийся в нее полностью. На какой высоте будет уровень воды?

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2}(x^2-4x+3)>1.$$

3. Решить уравнение

$$1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x=0.$$

Вариант 2

1. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Найти радиус шара, если длина стороны основания пирамиды равна l и высота пирамиды равна h.

2. Решить уравнение

$$(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62.$$

3. Решить уравнение

$$5\sin 2x+\sin x+\cos x=1.$$

Физика

1. С крутого берега реки высотой $h=20$ *м* бросают горизонтально камень со скоростью $v_0=15$ *м/сек*. Через какое время камень достигнет воды? С какой скоростью он упадет в воду? Ускорение свободного падения принять $g=10$ *м/сек*^{2}.

2. К концам нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два груза: слева массой $m_1=40$ *г*, справа — массой $m_2=120$ *г*. Определить натяжение нити. Принять $g=10$ *м/сек*^{2}.

3. Диск вращается в горизонтальной плоскости, делая $n=30$ *об/мин*. На расстоянии $r=20$ *см* от оси вращения лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы тело не было сброшено с диска?

4. Снаряд массой $m_1=10$ *кг*, летящий горизонтально со скоростью $v_1=500$ *м/сек*, попадает в вагон с песком массой $m_2=10^4$ *кг* и застревает в нем. Какова будет скорость вагона, если до попадания снаряда он двигался со скоростью $v_2=36$ *км/час* в том же направлении, что и снаряд?

5. Стальной резец массой $m=400$ *г* нагрели до температуры $t_1=800$°C и погрузили для закалки в воду. Объем воды 10 *л*, температура $t_2=20$°C. До какой температуры охладится резец? Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}19\cdot10^3$ *дж/(кг·град)*, стали $c_{ст}=$ $=460$ *дж/(кг·град)*. Ответ округлить до целого числа.

6. С какой скоростью свинцовая пуля должна удариться о преграду, чтобы расплавиться? Считать, что при ударе 50% выделившегося количества теплоты идет на нагревание пули. Начальная температура пули 212°С. Удельная теплоемкость свинца $c_{св}=130$ *дж/(кг·град)*, удельная теплота плавления свинца $\lambda=0{,}25\cdot10^5$ *дж/кг*, температура плавления свинца $t_{пл}=327$°С.

7. Поверхностная плотность электрического заряда на проводящем шаре $\sigma=8{,}85\cdot10^{-7}$ *к/м²*. Напряженность электрического поля на расстоянии $r=2$ *м* от поверхности шара $E=3{,}6\cdot10^4$ *н/к*. Определить радиус шара.

8. В электрическом поле, образованном зарядом $Q=-2\cdot10^{-7}$ *к*, перемещают заряд $Q_1=10^{-9}$ *к* из точки, находящейся на расстоянии $r_1=0{,}3$ *м* от первого заряда, в точку на расстоянии $r_2=1{,}5$ *м* от него. Какова необходимая для этого работа?

9. Какое количество электричества пройдет по проводнику сопротивлением $R=10$ *ом* за время $t=20$ *сек*, если к концам проводника приложено напряжение $U=12$ *в*? Какая работа будет произведена при этом?

10. При замыкании элемента на сопротивление $R_1=4{,}5$ *ом* ток в цепи $I_1=0{,}2$ *а*, а при замыкании того же элемента на сопротивление $R_2=10$ *ом* ток в цепи $I_2=0{,}1$ *а*. Найти э. д. с. элемента.

11. Определить величину э. д. с., индуцируемой в прямом проводнике, который перемещается в однородном магнитном поле со скоростью $v=7$ *м/сек*. Длина проводника $l=0{,}4$ *м*, магнитная индукция поля $B=0{,}9$ *тл*, а направление вектора скорости составляет угол $\alpha=30°$ с направлением поля.

12. Две свечи, поставленные рядом, освещают экран. Расстояние от свечей до экрана $l=1$ *м*. Одну свечу погасили. На сколько надо приблизить экран, чтобы освещенность его осталась прежней? Ответ округлить до десятых долей.

13. Собирающая линза дает изображение предмета, помещенного на расстоянии $s_1=30$ *см*, по другую сторону линзы на расстоянии $s_2=60$ *см*. Чему равны фокусное расстояние F линзы и ее оптическая сила D?

14. Показатель преломления вещества $n=1{,}2$. Определить длину волны света в веществе, если частота света $\nu=5\cdot10^{14}$ *сек⁻¹*. Ответ дать в микрометрах.

15. Найти энергию фотона для оранжевых лучей с длиной волны $\lambda=0{,}6$ *мкм*. Ответ дать в электрон-вольтах, округлить его до целого числа. Постоянная Планка $h=6{,}63\times10^{-34}$ *дж·сек*; 1 *эв* $=1{,}6\cdot10^{-19}$ *дж*.

А. Буров, В. Ионов,
В. Ляховский

Как устроено атомное ядро

(Начало см. с. 30, 42)

Он хочет объяснить их свойства либо с помощью антропоморфных терминов «тесная близость», «испытывать отвращение» и т. п., либо в терминах механики макроскопических тел, к которой она имеет весьма отдаленное отношение.

...Для того чтобы вникнуть в суть явления, приходится воспользоваться системой правил, установленных в ходе изучения атомных и ядерных явлений, и принять «не поддающуюся здравому смыслу» трактовку квантовой теории в ее современной волновой форме. Далее я мог бы сказать полковнику Мур-Брабазону, что так уж принято считать протон и нейтрон разными состояниями одной и той же частицы вещества. Я мог бы ввести в рассмотрение статистики Ферми и Бозе и привести правила, позволяющие определять структуру ядра, в частности устанавливать, содержит ли оно электроны. Все это, однако, требует введения в рассмотрение многих сложных для понимания деталей и может быть расценено как попытка «пустить пыль в глаза».

Заканчивалось письмо так:

«Если полковник Мур-Брабазон все еще неудовлетворен, я напомню ему о ньютоновской эпохе. Разве пытался в то далекое время Ньютон привязывать (хотя бы мысленно) планеты пружинами к Солнцу на том основании, что тело не может оказывать воздействие там, где его нет?

...Не могу обещать, что все ученые разделяют мои взгляды, но они найдут в них такое, что могут оценить по достоинству. А теперь, может быть, в свою очередь полковник Мур-Брабазон проведет для нас обзор британской внешней политики за последние десять лет? Она для меня столь же загадочна, как для него развитие ядерной механики за тот же период.»

Следующее письмо полковника Мур-Брабазона явно свидетельствует о том, что ответ профессора Андраде на вопрос, касающийся строения ядра, его не совсем удовлетворил. Однако, будучи человеком очень обязательным, полковник выполнил пожелание профессора и в свою очередь рассказал о внешней политике Великобритании за истекшее десятилетие. В частности, в письме говорилось:

«Поскольку приближаются рождественские праздники, подобная взаимовыручка вполне своевременна.

(Окончание см. с. 77)

Х Всесоюзная олимпиада школьников

М. Смолянский,
В. Стеценко,
Е. Турецкий

Олимпиада по математике

Юбилейная Х Всесоюзная математическая олимпиада проходила в Средней Азии. 156 мальчиков и девочек съехались 14 апреля 1976 года в столицу солнечного Таджикистана — город Душанбе для участия в этой олимпиаде.

Математические олимпиады проводятся в нашей стране с середины тридцатых годов по инициативе известного советского математика Бориса Николаевича Делоне. Первая такая олимпиада состоялась в 1934 году в Ленинграде. С 1967 года проводятся Всесоюзные олимпиады школьников, в которых принимают участие команды областей, краев, союзных республик.

В 1974 году было утверждено новое положение о Всесоюзной олимпиаде школьников, согласно которому олимпиада проходит в пять этапов: школьные, районные (городские), областные, республиканские олимпиады и, наконец, заключительный этап. По положению в заключительном этапе олимпиады участвуют команды союзных республик, Москвы, Ленинграда, Главного Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота и Министерства путей сообщения СССР, а также участники заключительного этапа предыдущей олимпиады, занявшие I—II места.
Численный состав команды определяется в соответствии с числом учащихся в республике: от РСФСР — 48 человек, от УССР — 12 человек, от БССР, Каз. ССР и Уз. ССР — по 6 человек; остальные команды состоят из 3 человек.

15 апреля 1976 года в актовом зале Республиканской музыкальной школы-интерната состоялось открытие заключительного этапа Х Всесоюзной математической олимпиады. На открытии присутствовали заместитель председателя Совета Министров Таджикской ССР Р. Ю. Юсуфбеков, зав. отделом науки и учебных заведений ЦК КП Таджикистана А. А. Абдуназаров, министр народного образования республики Р. Д. Дадабаев, секретарь ЦК ЛКСМ Таджикистана Х. Абдуназаров.

Открыл олимпиаду председатель Оргкомитета зам. министра народного образования Таджикской ССР Н. З. Волощук. С приветственным словом к участникам обратился Р. Ю. Юсуфбеков.

Заместитель председателя Всесоюзного Оргкомитета по проведению олимпиады М. Н. Тамбеева огласила письмо министра просвещения СССР

М. А. Прокофьева, в котором он поздравил участников олимпиады с началом состязаний и пожелал им успехов.

Юные математики отправили приветственные телеграммы в Киев и Минск, в которых в этот же день открывались заключительные этапы Всесоюзных олимпиад химиков и физиков.

Следующий день, 16 апреля, был первым днем состязаний. В них приняли участие 41 учащийся восьмого класса, 50 — девятого класса и 65 — десятого класса. Интересно отметить, что два участника: Олег Окунев, десятиклассник из Казани, и Вилаят Гусейнов, десятиклассник из Нахичевани, приняли участие во Всесоюзной олимпиаде в четвертый раз, по три раза приезжали на олимпиаду 19 человек.

Ученикам 8 и 9 классов было предложено 4 задачи, учащимся десятых классов — пять задач (разбор некоторых задач приводится в статье Л. Лиманова; см. с. 60).

Несколько слов о подборе предложенных задач. Отбор задач для Всесоюзной олимпиады — это, по-видимому, один из самых трудных моментов работы жюри. Не так-то просто придумать задачу, которая была бы новой для всех ребят, приехавших на заключительный тур, многие из которых учатся в специализированных физматшколах, хорошо знакомы с популярной математической литературой, регулярно читают журнал «Квант». Кроме того, олимпиадная задача должна удовлетворять непременному условию: она не должна выделять тех, кто больше знает, тех, кто лучше «технически» оснащен, она должна выявить способность анализа новой незнакомой ситуации, остроту логического мышления, способность быстрой ориентации.

Стоит заметить, что при отборе задач жюри старалось удовлетворить еще одному важному требованию — занимательности предложенных задач. При этом за внешней занимательностью должны стоять какие-то серьезные математические факты, к открытию которых, возможно в простой ситуации, должны прийти ученики. Почти половина всех предложенных на X олимпиаде задач составлена студентом 3-го курса Ленинградского университета, членом жюри С. В. Фоминым.

Итоги первого дня состязаний видны из таблицы внизу (в ней используются следующие обозначения: «+» — задача решена, «±» — задача решена не полностью, но ее решение продвинуто достаточно далеко, «∓» — задача не решена, но имеются некоторые продвижения в решении, «—» — задача не решена, «0» — задача не решалась вовсе).

Во второй день состязаний, 18 апреля, был проведен интересный эксперимент. Прообраз такого эксперимента был впервые проведен пять лет назад на Всесоюзной олимпиаде в Риге для десятого класса. Участникам каждого класса было предложено по три сложных задачи, каждая из которых была разбита на несколько пунктов, расположенных в порядке возрастания трудности. В предисловии к задачам отмечалось, что полное решение каждой из этих задач

Классы	8				9				10				
Задачи	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5
+	6	10	2	13	20	41	6	1	20	40	10	24	2
±	2	3	0	1	1	0	5	8	6	7	3	3	4
∓	10	6	10	2	3	1	5	0	8	4	2	0	0
—, 0	23	22	29	25	26	8	24	41	31	14	50	38	59

представляет небольшое математическое исследование и что жюри рекомендует, чтобы в одной (максимум в двух) из них (по своему выбору) каждый участник продвинулся как можно дальше. Задачи эти были разные по характеру с тем, чтобы каждый мог найти задачу по своему вкусу. Надо сказать, что подготовка таких задач — дело очень трудное, так как требуется составить задачи примерно одинакового уровня, достаточно сложные и разнообразные по тематике. Жюри получило ряд интересных работ, в которых было достаточно полное продвижение в решении одной-двух задач. В целом жюри признало проведенный эксперимент полезным и считает, что задачи такого исследовательского плана желательны не только на заключительном туре олимпиады, но и на самых различных этапах работы со школьниками.

Проверка работ участников проходила в комиссиях по классам. В обсуждении каждой работы участвовало сразу несколько членов жюри. Затем был организован разбор задач для участников олимпиады и руководителей команд. Участники имели возможность ознакомиться с результатами проверки всех работ и в случае необходимости обжаловать решение жюри.

Все это потребовало большого напряжения от членов жюри, которым иногда приходилось работать до 3—4 часов утра.

Напряженная работа участников олимпиады сменялась активным разнообразным отдыхом. Участники олимпиады совершили интересные увлекательные экскурсии на завод холодильников «Памир», на уникальную Нурекскую ГЭС, осмотрели высотную плотину, спустились в машинный зал; с увлечением знакомились с Гиссарской обсерваторией, Гиссарской крепостью, посетили ВДНХ и Республиканский краеведческий музей. Вся эта насыщенная программа перемежалась встречами с новыми друзьями — учащимися душанбинских школ. Дружба, зародившаяся с первых дней олимпиады, получила свое продолжение: ребята обменялись адресами, пишут письма, составляют планы встреч.

В свободное время ребятам был прочитан цикл интересных лекций: «Минимальные расстояния», «Разные бесконечности», «Биллиарды», «Основы математической логики», «Задачи Московской математической олимпиады».

Редакция журнала «Квант» провела несколько, ставших уже традиционными, встреч со школьниками. Практически все «олимпийцы» являются активными читателями нашего журнала. На этих встречах, проходивших живо и интересно, школьники высказали ряд пожеланий, которые редакция постарается учесть в своей работе.

Мы с удовольствием хотели бы отметить очень хорошую организацию олимпиады. И сама олимпиада, и досуг ребят были организованы очень четко и интересно.

По итогам двух дней состязаний жюри X Всесоюзной математической олимпиады постановило присудить 12 первых, 25 вторых и 33 третьих премии. Кроме того, решено отметить похвальными отзывами I степени 29 участников, похвальными отзывами II степени 32 участника.

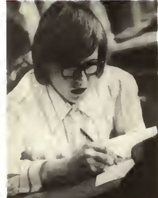
Многие ребята получили призы, учрежденные разными организациями и предприятиями для участников заключительного этапа Всесоюзной олимпиады.

Специальным призом журнала «Квант» награжден школьник 8 класса г. Москвы Виктор Гальперин.

За отличные успехи в олимпиаде призами журнала «Квант» (подписка на 1977 год) награждены Самвел Абаджян, Павел Боровиков, Вячеслав Кротов, Андрей Летчиков, Бидзина Мидодашвили, Рустам Убайдуллаев, Алексей Фолин, Ольга Шарапова.


1


2


3


4

Олимпиада у математиков

1. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени, десятиклассники Н. Нецветаев, С. Миронов, Т. Хованова, Б. Соломяк и Ю. Пасс.
2. Победители олимпиады, награжденные дипломами I степени, восьмиклассники Г. Мамедов, Л. Лисичук, С. Оревков, В. Бугаенко и В Гальперин.
3, 4, 5, 6. Участники заключительного этапа олимпиады за работой.
7. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени, девятиклассники В. Бальчитис и Г. Рыбников.

5



6


7

Л. Лиманов

Задачи олимпиады по математике

В этой статье разбираются четыре задачи заключительного тура X Всесоюзной математической олимпиады, которые не вошли в «Задачник «Кванта». Решения задач, опубликованных в «Задачнике», появятся в соответствующих номерах журнала в следующем году.

8 класс

1. На столе как-то лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Рассмотрим треугольник с такими вершинами: центр стола O, конец минутной стрелки i-х часов в момент времени t — обозначим его буквой A_i — и конец минутной стрелки этих же часов через полчаса — точка B_i (рис. 1). Ясно, что центр i-х часов — точка O_i — является основанием медианы треугольника $A_i OB_i$, проведенной из вершины O. Легко доказать, что в произвольном треугольнике удвоенная длина медианы меньше суммы длин заключающих ее сторон (рис. 2.) Равенство же возможно лишь в том случае, когда $\widehat{A_iOB_i}=0$ (т. е. когда точки A_i и B_i лежат на луче с вершиной в точке O). Но если в любой момент времени $\widehat{A_iOB_i}=0$, то i-е часы стоят, что противоречит условию задачи, согласно которому все часы идут правильно. Поэтому найдется момент времени t_0, когда $\widehat{A_iOB_i}\neq 0$ и $2|OO_i|<|OA_i|+|OB_i|$. Для момента времени t_0 будет выполнено неравенство

$$2(|OO_1|+|OO_2|+\ldots+|OO_{50}|)<(|OA_1|+|OA_2|+\ldots+|OA_{50}|)+(|OB_1|+|OB_2|+\ldots+|OB_{50}|).$$

Из этого неравенства следует, что либо в момент времени t_0 $|OO_1|+|OO_2|+\ldots+|OO_{50}|<|OA_1|+|OA_2|+\ldots+|OA_{50}|$, либо же в момент времени $t_0+{}^1/_2$ час — $|OO_1|+|OO_2|+\ldots+|OO_{50}|<|OB_1|+|OB_2|+\ldots+|OB_{50}|$. А именно это нам и требовалось доказать.

9 класс

2. Можно ли вершины куба занумеровать различными трехзначными числами, составленными из цифр 1 и 2 так, чтобы номера любых двух соседних вершин различались не менее, чем в двух разрядах?

Рассмотрим такую систему координат: начало координат — в вершине нижнего основания куба, а положительные направления координатных осей совпадают с направлениями ребер куба, выходящих из этой вершины (рис. 3). В этой системе координаты вершин куба имеют вид: (0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), причем только те вершины, у которых совпадают р о в н о две координаты, являются соседними. Поэтому вопрос задачи можно переформулировать так: *существует ли такое отображение множества вершин куба на себя, при котором все соседние вершины куба перестают быть соседними*? Такое отображение существует; как оно устроено, видно из рисунка 4 (куб на

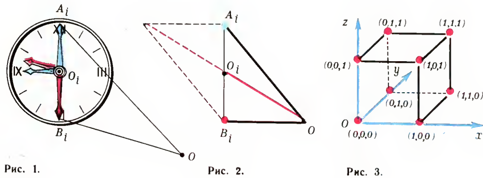


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

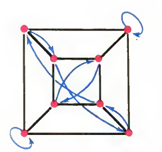


Рис. 4.



Рис. 5.



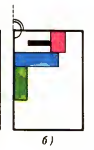


Рис. 6.

этом рисунке изображен несколько необычно — в виде двух «концентрических» квадратов с «ребрами»). Синие стрелочки показывают, куда переходят вершины (на рисунке 4 две вершины остаются на месте). Постарайтесь выяснить, сколько *различных* таких отображений существует.

10 класс

2. В правильном 1976-угольнике отмечены середины всех сторон и середины всех диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

Ответ: 1976. Докажем это. Середины всех диагоналей одинаковой длины l лежат на одной окружности, концентрической с окружностью, в которую вписан многоугольник. Поскольку всего есть диагонали $\frac{1976}{2} = 988$ различных длин (к «диагоналям» мы причисляем и стороны), все отмеченные точки лежат на 988 концентрических окружностях, причем самая маленькая из них — радиуса ноль (вырождается в точку — центр нашего многоугольника). Поэтому окружность не из этого семейства может содержать не больше $1 + 2 \cdot 987 = 1975$ отмеченных точек, поскольку две «полноценные» окружности пересекаются по двум точкам, и у нас — еще одна «неполноценная» окружность — точка, являющаяся центром многоугольника. Окружность же из «концентрического» семейства, проходящая через середины сторон нашего 1976-угольника, содержит 1976 отмеченных точек. В заключение отметим, что окружности, содержащие ровно 1975 отмеченных точек, существуют. Одна из них изображена на рисунке 5 — это окружность, описанная вокруг правильного 1976-угольника, подобного исходному (с коэффициентом 1/2), у которого одна вершина совпадает с вершиной данного многоугольника, а остальные 1975 вершин — отмеченные: середины двух сторон и 1973 диагоналей, выходящих из этой вершины.

3. На квадратном листе бумаги нарисованы n прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать эти прямоугольники, то количество кусков, на которые распадается оставшаяся часть листа, не больше $n + 1$.

Утверждение задачи легко вывести из такого замечания: сумма величин внешних углов многоугольника, примыкающих к его внутренним углам, меньшим π, не меньше 2π. (Этот факт вы без труда докажете сами.) Из условия же задачи сразу видно, что внешние углы получающихся частей являются либо внутренними углами вырезанных прямоугольников (рис. 6, *а*), либо же внешними углами нашего листа бумаги (рис. 6, *б*), т. е. сумма всех внешних углов не превышает $2\pi(n + 1)$. Но это и означает, что получится не больше $(n + 1)$ кусков. Из доказательства видно, что если получилось $(n + 1)$ кусков, то все эти куски выпуклы.

Т. Петрова,
Л. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный тур X Всесоюзной олимпиады по физике проходил в этом году в Минске — столице Белорусской ССР. Его участниками были победители республиканских олимпиад, а также дипломанты предыдущей Всесоюзной олимпиады. Всего в Минск приехали 144 школьника: 42 восьмиклассника, 48 девятиклассников и 54 десятиклассника.

15 апреля в Республиканской школе-интернате по музыке и изобразительному искусству состоялось торжественное открытие заключительного тура X Всесоюзной олимпиады по физике. Успехов в предстоящей борьбе участникам пожелали: заместитель министра просвещения БССР Р. И. Сернов, председатель жюри олимпиады заведующий кафедрой ядерной физики Белорусского государственного университета профессор С. С. Шушкевич; приветствие министра просвещения СССР М. А. Прокофьева зачитал представитель Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

16 апреля проходил первый — теоретический — тур олимпиады. Как и всегда, восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач восьмиклассникам и девятиклассникам отводилось по 4 часа, десятиклассникам — 5 часов.

17 апреля ребята отдыхали. А жюри проверяло работы. После проверки выяснилось, что наиболее трудной для восьмиклассников оказалась задача № 3 (ее решили только 2 человека), а самой легкой — задача № 1 (тексты задач приведены в конце статьи). Из девятиклассников задачу № 5 решили только 2 человека, и почти все успешно справились с задачей № 3. Среди десятиклассников наибольшие трудности вызвала задача № 3 (ее довели до конца только 4 человека), а задачу № 2 решили многие.

18 апреля состоялся второй — экспериментальный — тур олимпиады. Как и в прошлом году, задания экспериментального тура выполняли все участники олимпиады. Но, в отличие от предыдущих олимпиад, на этот раз в каждом классе предлагалось по 2 экспериментальных задачи.

День 19 апреля для членов жюри был, пожалуй, самым сложным днем. Снова были просмотрены все работы теоретического тура, обсуждены результаты экспериментальных работ, и после тщательного анализа и взвешивания названы имена лучших.

20 апреля на торжественном закрытии X Всесоюзной олимпиады по физике ее участникам было объявлено решение жюри. Дипломы I, II и III степени получили 42 участника олимпиады. Грамотами и спецпризами за успешное участие в олимпиаде были награждены 32 участника олимпиады. Специальный приз — подшивка журнала «Квант» за 1975 год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — получил *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.). Подпиской на журнал «Квант» на 1977 год награждены восьмиклассники: *Д. Захаров* (п. Палатка Магаданской обл.), *А. Дик* (с. Лебединовка КиргССР), *С. Канджа* (с. Гура МолдССР), *И. Вайсбурд* (Томск), *А. Спиридонова* (Курган), *С. Русанов* (ст. Новопокровская Краснодарского кр.).

Все, кто принимал участие в заключительном этапе X Всесоюзной олимпиады по физике, надолго запомнят дни, проведенные в Минске. Устроители олимпиады — сотрудники кафедры ядерной физики Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина — сделали все, чтобы ее участники работали спокойно и организованно, а свободное время проводили интересно.

Огромное впечатление осталось у ребят от посещения Хатыни — мемориального комплекса, посвященного памяти жертвам фашизма. Настоящий «профессиональный» интерес вызвала у школьников экскурсия на атомный реактор Академии наук БССР. Очень интересной была встреча участников олимпиады с учеными, преподавателями университета и его студентами. Закончилась эта встреча веселой викториной. Чтобы ответить на вопросы викторины, надо было быть настоящим эрудитом: знать историю и музыку, математику и поэзию, уметь рисовать и пользоваться счетной машиной.

В заключительный день олимпиады состоялся последний «бой» — команда Ленинграда вызвала на физбой команду Москвы. Началось состязание с конкурса капитанов. За короткое время капитаны должны были решить следующие задачи:

1. При испарении жидкости молекулы, покидающие жидкость, теряют часть своей энергии. Однако температуры жидкости и насыщенного пара над ней одинаковы. Как объяснить этот «парадокс»?

2. Нарисовать (быстро!) графики зависимости кинетических энергий двух шариков, испытывающих упругое столкновение, от отношения их масс.

3. Колесо радиуса r катится без проскальзывания по внутренней поверхности обода колеса радиуса $4r$. Нарисовать (быстро!) траекторию точки колеса.

Следующий этап физбоя проходил по такому принципу: из задач, предложенных «судьями» заранее всем участникам боя, каждая команда выбирала по одной и приводила свое решение, а вторая команда выступала в качестве оппонента. Право первого выбора задачи получила команда Ленинграда, победившая в конкурсе капитанов. Ленинградцы решали такую задачу:

Упрощенно атом гелия можно представить как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda = 0{,}06$ *мкм;* плотность жидкого гелия $\rho = 0{,}14$ *г/см*^{3}.

Москвичи выбрали следующую задачу:

Оценить максимальный размер дождевой капли, которая может отскочить от земли как упругий шарик, не разлетаясь в брызги.

А окончилось это состязание тем, что «болельщики», которых, как всегда, было гораздо больше, чем самих участников боя, предложили командам «на скорость» решить такую задачу:

Самолет, пролетев расстояние l_1 по прямой AB, попадает из пункта A в пункт B за время t_1. Затем он пролетает расстояние l_2 по прямой BC из пункта B в пункт C за время t_2 и возвращается в пункт A по прямой CA, пролетев расстояние l_3 за время t_3. Во время перелета дует ветер, скорость которого не меняется в течение всего перелета. Определить скорость ветра, если скорость самолета относительно воздуха во время всего полета по абсолютной величине постоянна.

По единому мнению судей победа в физбое со счетом 35 : 22 была присуждена команде Ленинграда.

Итак, 20 апреля закончилась X Всесоюзная олимпиада школьников

по физике. Но у десятиклассников — победителей олимпиады — впереди был еще один этап борьбы — Международная олимпиада. Она состоялась в июле этого года в столице Венгерской народной республики Будапеште. О ней мы расскажем в одном из ближайших номеров нашего журнала.

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся на экспериментальном туре X Всесоюзной олимпиады по физике (все задачи теоретического тура и некоторые задачи физбоя вошли в «Задачник «Кванта»; см. «Квант», 1976, № 7, 8, 9).

Экспериментальный тур

Задачи для этого тура были подготовлены преподавателями и научными сотрудниками кафедры ядерной физики и мирного использования ядерной энергии Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина.

8 класс

1. С помощью источника постоянного тока, резисторов, амперметра и вольтметра определить схему соединения и электрические параметры деталей, расположенных в коробочке.

2. Определить вес груза, используя штатив, неоднородный стержень, динамометр школьный, груз, вес которого больше пределов измерения динамометра, нить, миллиметровую бумагу.

9 класс

1. Измерить атмосферное давление. Оборудование: 1) стеклянные трубки, 2) резиновая трубка, 3) пробка, 4) штатив, 5) линейка, 6) стакан с водой.
2. Определить емкости конденсаторов. Оборудование: 1) конденсаторы — 2 шт., 2) источник э. д. с., 3) вольтметр, 4) соединительные проводники, 5) секундомер, 6) эталонные сопротивления — 3 шт.

10 класс

1. Определить, какие электрические детали находятся в коробочке и по какой схеме они соединены, используя ампер-вольт-омметр.
2. Определить коэффициент преломления жидкости, находящейся в стакане. Можно использовать линейку, лампочку, батарейку и экран.



1



2

Олимпиада у физиков

1. Председатель жюри олимпиады по физике профессор С. С. Шушкевич вручает награды победителям.

2. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени: Е. Пономарев, О. Лищенко (оба — победители Конкурса «Кванта»), Р. Шарипов и А. Сорокин.

3. Ю. Мухарский, получивший диплом III степени, победитель Конкурса «Кванта».

4. И. Гаврилов, награжденный дипломом II степени; самый юный участник заключительного тура олимпиады.

5. Х. Абдуллин, получивший диплом III степени; победитель Конкурса «Кванта».

6. В. Булатов, награжденный дипломом II степени и спецпризом за лучшее решение задач теоретического тура.

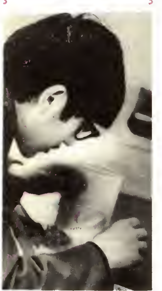
7. Л. Черных, получившая диплом III степени и спецприз за лучшее выполнение экспериментального задания.



3



4



5



6



7

Победители
X Всесоюзной олимпиады
школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Бугаенко В. (Киев, ФМШ № 145),
Гальперин В. (Москва, с. ш. № 57),
Лисничук Л. (Васнльков, с. ш. № 1),
Мамедов Г. (Баку, с. ш. № 160),
Оревков С. (Москва, с. ш. № 57);

по 9 классам —
Бальчитис В. (Шяуляй, с. ш. № 5),
Рыбников Г. (Москва, с. ш. № 42);

по 10 классам —
Миронов С. (Сафоново Смоленской обл., с. ш. № 6),
Нецветаев Н. (Ленинград, ФМШ № 45),
Пасс Ю. (Ленинград, с. ш. № 121),
Соломяк Б. (Ленинград, ФМШ № 45),
Хованова Т. (Москва, с. ш. № 444).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Алексеев А. (Пермь, с. ш. № 111),
Арафаилов С. (Ленинногорск КазССР, с. ш. № 14),
Вялый М. (Енакиево, с. ш. № 37),
Костусяк В. (Запорожье, с. ш. № 28),
Лысенок И. (п. Нароч Минской обл., с. ш. № 1),
Ненашев А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Саблин А. (п. Хохольский Воронежской обл., с. ш. № 1),
Скубович Д. (Ленинград, ФМШ № 45);
Текко Я. (Вильянди, с. ш. № 1),

по 9 классам —
Амброладзе А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Арбузов Л. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Аузиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Калика И. (Киев, ФМШ № 145),
Кодряну А. (Москва, с. ш. № 2),
Ослон В. (Киев, с. ш. № 173),
Сиденко С. (с. Александровка Одесской обл., с. ш. № 1),
Флаасс Д. (Новосибирск, ФМШ № 165);

по 10 классам —
Гончаров А. (Никополь, с. ш. № 13),
Любащенко В. (Киев, ФМШ № 145),
Мельник А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Смирнов А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Трегуб С. (Ташкент, с. ш. № 103),
Финашин С. (Ленинград, ФМШ № 45),
Хазанов С. (Куйбышев, с. ш. № 41),
Царев С. (Великие Луки, с. ш. № 11).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Кротов А. (Иваново, с. ш. № 28),
Летчиков А. (Ижевск, с. ш. № 30),
Мидодашвили Б. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Убайдуллаев Р. (Ташкент, с. ш. № 5),
Фолин А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Шарапова О. (Ташкент, с. ш. № 110);

по 9 классам —
Абаджян С. (Ереван, с. ш. № 1),
Боровиков П. (Ангарск, с. ш. № 10),
Глезин Е. (Ленинград, с. ш. № 30),
Григорьева И. (Казань, с. ш. № 131),
Конев-Барышников Ю. (Москва, с. ш. № 91),
Нигматулин Р. (Альметьевск, с. ш. № 16),
Самуни М. (Ленинград, с. ш. № 30),
Спиваковский М. (Москва, с. ш. № 57),
Хашин С. (Москва, ФМШ № 18);
Шматов Ю. (Москва, ФМШ № 18),

по 10 классам —
Белов А. (Свердловск, с. ш. № 5),
Буров Ю. (Москва, с. ш. № 2),
Гриневич П. (Москва, с. ш. № 204),
Гусейнов В. (Нахичевань, с. ш. № 3),
Клепцын А. (Ульяновск, с. ш. № 25),
Козлов В. (Москва, ФМШ № 18),
Красаускас Р. (Вильнюс, с. ш. № 1),
Лайдерман А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Линдман Е. (Могилев-Подольский, с. ш. № 5),
Литвиненко Д. (Севастополь, с. ш. № 34),
Лукьяненко С. (Москва, ФМШ № 18),
Малышев А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Медведь В. (Молодечно, с. ш. № 3),
Панин И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Соркин Ю. (Москва, с. ш. № 2),
Федоров В. (Москва, ФМШ № 18),
Щербина М. (Харьков, с. ш. № 27),

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получил
Пономарев Е. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 9 классам —
Лищенко О. (Киев, ФМШ № 145),
Шарипов Р. (Каракуль Бухарской обл., с. ш. № 18);

по 10 классам —
Сорокин А. (Киров, с. ш. № 22).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Гаврилов И. (Москва, с. ш. № 19),
Галда Н. (п. Клевань Ровенского р-на УССР, с. ш. № 1),
Мичинский С. (Новосибирск, с. ш. № 126),
Пиктрис Р. (Вильнюс, с. ш. № 22),
Рылов С. (Москва, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Моржаков А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Мошков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Решетов В. (Рославль, с. ш. № 3),
Третьяченко К. (Киев, ФМШ № 145),
Щукин В. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —
Булитов В. (Ленинград, ФМШ № 45),
Голубенцев А. (Саратов, с. ш. № 13),
Стиршенко В. (Запорожье, с. ш. № 28).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Вайсбурд И. (Томск, с. ш. № 6),
Гаркавый В. (Лида, с. ш. № 1),
Гербич А. (Дрезден (ГСВГ), с. ш. № 15),
Деражне А. (Киев, ФМШ № 145),
Ковригин Д. (Ломоносов, с. ш. № 1),
Коробейников М. (Ашхабад, с. ш. № 7),
Метлицкий В. (Калуга, с. ш. № 23),
Нейман В. (Ленинград, ФМШ № 45);

по 9 классам —
Гонопольский А. (Минск, с. ш. № 88),
Грибов Б. (Воронеж, с. ш. № 66),
Григорьев Ю. (Чебоксары, школа-интернат № 2),
Мухарский Ю. (Киев, ФМШ № 145),
Нилибоцкий Б. (Минск, с. ш. № 98),
Хейделберг М. (Таллин, с. ш. № 1),
Черных Л. (Лида, с. ш. № 1),
Чистяков П. (Москва, с. ш. № 2),
Шкаровский Ю. (с. Станишовка Киевской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам
Абдуллин Х. (Алма-Ата, РФМШ),
Будько С. (Витебск, с. ш. № 9),
Кривцун В. (Харьков, с. ш. № 27),
Семенов А. (Москва, с. ш. № 179),
Тирасов В. (Ленинград, ФМШ № 45),
Тетерин Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Хамитов И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Цыбулевский М. (Винница, с. ш. № 17).

Спрашивайте — отвечаем

Альфия Сулейманова, ученица Дрожжановской средней школы (село Старое Дрожжаное ТАССР), спрашивает, можно ли создать так называемые сверхаккумуляторы, т. е. аккумуляторы, основанные на явлении сверхпроводимости, и использовать их как источники энергии.

На эти вопросы мы попросили ответить консультанта отдела физики нашего журнала А. Володина.

Аккумуляторы энергии, работа которых основана на явлении сверхпроводимости, в настоящее время уже не фантастика. В лабораториях научно-исследовательских институтов построены и изучаются подобные устройства, называемые сверхпроводящими накопителями энергии. В общих чертах такой накопитель представляет собой сверхпроводящую катушку, по которой течет незатухающий ток. Энергия в нем запасена в виде энергии магнитного поля. В принципе это самый компактный способ хранения энергии, поскольку в малом объеме, занимаемом интенсивным магнитным полем, может быть запасена очень большая энергия. Этого нельзя сказать про другие накопители энергии. Например, аккумулятор электрической энергии не может быть столь компактным, так как для электрического поля существует предельное значение напряженности, связанное с возможностью электрического пробоя. Для магнитного же поля ограничений, связанных с «пробоем», нет.

Единственное принципиальное ограничение плотности энергии, запасенной в магнитном поле, обусловлено давлением магнитного поля на материал катушки. Такое давление возникает из-за взаимодействия тока в катушке с магнитным полем и растет пропорционально квадрату индукции магнитного поля. Превышение предельно допустимых механических нагрузок на катушку может привести к ее разрушению.

Разработка прочных конструкций катушек представляет собой лишь одну из проблем, требующих своего решения для практического использования сверхпроводящих накопителей энергии. Другие проблемы связаны с поиском новых сверхпроводников с высокими критическими параметрами (т. е. большим незатухающим током и высокой температурой перехода в нормальное, несверхпроводящее, состояние), с созданием эффективных криогенных систем (ведь сверхпроводимость пока «работает» только при очень низких температурах, меньших — 250°С). Над решением этих проблем успешно работают ученые, и практическое использование сверхпроводящих аккумуляторов энергии — дело ближайшего будущего.



Чему равен $\sqrt[0,5]{4}$?

В ряде пособий по математике для поступающих и в некоторых других изданиях получила распространение трактовка решения одного типа уравнений, противоречащая принятому в школе определению. Мы считаем необходимым предостеречь читателей от слишком доверчивого отношения к ошибочным утверждениям авторов этих книг.

Рассмотрим уравнение № 7 053 из «Сборника задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы» под редакцией М. И. Сканави (М., «Высшая школа», 1973):

$$\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot \sqrt[x]{0,125}}} = 4\sqrt[3]{2}. \qquad (1)$$

В качестве корней этого уравнения в ответе приводятся два значения:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{5}. \qquad (2)$$

По-видимому, составители «Сборника» исходили из следующего решения: уравнение (1) после несложных преобразований, использующих свойства степеней и корней, переписывается в виде

$$\sqrt[6]{\sqrt[x]{2^{5x^2-3}}} = 2^{7/3}; \qquad (3)$$

далее имеем

$$\sqrt[6x]{2^{5x^2-3}} = 2^{7/3}, \qquad (4)$$

откуда

$$2^{\frac{5x^2-3}{6x}} = 2^{7/3}; \qquad (5)$$

наконец, приравняв показатели степени, приходим к квадратному уравнению с корнями (2).

Однако указанное решение нельзя считать исчерпывающим, поскольку из проведенных формальных вычислений еще совсем не ясно, являются ли на самом деле найденные значения (2) корнями исходного уравнения (1). Этот вопрос требует специальной проверки.

Прежде чем такую проверку осуществить, напомним, что *в школьном курсе математики при определении выражения* $\sqrt[n]{a}$ *(арифметического корня n-й степени из числа a) четко оговаривается, что n — натуральное число, большее единицы* (см. «Алгебра 8» п. 24). Таким образом, с точки зрения принятого в школе определения выражения

$$\sqrt[0,5]{4}, \quad \sqrt[-2]{2,5}, \quad \sqrt[\pi]{\pi}$$

так же лишены смысла, как и выражения

$$\frac{1}{0}, \quad \sqrt{-4}, \quad (-3)^{1/2},$$

$$\log_2(-3), \quad \arcsin\pi.$$

Поэтому число $x = -\frac{1}{5}$ не может быть признано корнем уравнения (1); его подстановка в левую часть уравнения дает бессмысленное выражение $\sqrt[-1/5]{0,125}$. Другими словами, ответ (2) неверен; на самом деле уравнение (1) имеет единственный корень $x = 3$.

Откуда же возникает в приведенном решении посторонний корень? Дело в том, что уравнения (4) и (5) не равносильны: *выражения*

$$\sqrt[x]{a} \text{ и } a^{\frac{1}{x}} \qquad (6)$$

тождественны относительно x только на множестве натуральных чисел, больших единицы, а потому переход от уравнения (4) к уравнению (5) расширяет область допустимых значений переменной и, следовательно, может привести (и в случае уравнения (1) действительно приводит) к появлению посторонних корней. Может привести к появлению посторонних корней и переход, аналогичный переходу от уравнения (3) к уравнению (4): например, уравнения

$$\sqrt[6]{\sqrt[x]{9}} = 3 \text{ и } \sqrt[6x]{9} = 3$$

не равносильны, поскольку число $x = \frac{1}{3}$ является корнем второго уравнения, но не удовлетворяет первому (выражение $\sqrt[1/3]{9}$ бессмысленно).

Мы не стали бы столь подробно останавливаться на этих прописных истинах, если бы подобные ошибки не встречались во многих книгах и пособиях для поступающих. Так, в уже упомянутом выше «Сборнике задач» из-за невнимания к областям определения выражений (6) даны неверные ответы к следующим уравнениям и системам уравнений: №№ 2.026, 2.159, 2.160, 2.241, 2.261, 2.272, 2.298, 7.001, 7.002, 7.005, 7.008, 7.012, 7.019, 7.055, 7.061, 7.065, 7.166, 7.219, 7.258, 9.051, 9.052, 9.109, 9.155, 9.241, 16.092. По той же причине ошибочны и ответы к задачам №№ 277, 285, 294, 311, 316, 317 из «Сборника задач по элементарной математике» Н. П. Антонова и др. (М., «Наука», 1974), к задачам №№ 24 и 29 на стр. 95 книги «Математика. Поступающим в вузы» под редакцией А. И. Бородина (Киев, «Вища школа», 1975), к задаче № 436 из «Пособия по ма

тематике для поступающих в вузы» Б. П. Александрова и др. (М., изд-во МГУ, 1972), к задаче № 11.6 книги «Задачи по элементарной математике повышенной трудности» Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина (М., «Наука», 1971), к задаче 6 на стр. 194, 195 «Пособия по математике для поступающих в вузы» В. В. Зорина (М., «Высшая школа», 1973), к задаче 1 на стр. 50—51 книги «Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике» В. А. Тупикова (Минск, «Вышэйшая школа», 1974).

Список можно продолжать дальше еще долго. Не будем этого делать, но отметим, что в него попадает и ряд методических книг для учителей: Н. Г. Бородуля. «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» (М., «Просвещение», 1968); Г. А. Ястребинский. «Уравнения и неравенства, содержащие параметры» (М., «Просвещение», 1972); С. Е. Ляпин и др. «Сборник задач по элементарной математике» (М., «Просвещение», 1973).

К сожалению, аналогичные ошибки были допущены и в ответах к задачам вариантов вступительных экзаменов различных вузов, которые публиковались в журнале «Квант» (см., например, 1972, № 3, с. 56; 1972, № 7, с. 46; 1974, № 7, с. 58; 1975, № 7, с. 57, 63).

Сказанное достаточно наглядно подтверждает известный факт: формальное оперирование символами, без анализа их точного смысла и исследования законности проводимых преобразований, неизбежно приводит к ошибкам.

А. Кужель, Т. Чикирисова

Поиски и открытия планет

«Когда мы начинали работу над книгой, нашим первоначальным желанием было рассказать читателю о том, как были открыты самые далекие, невидимые невооруженным глазом большие планеты Солнечной системы — Уран, Нептун и Плутон... Но по мере работы над книгой мы все больше убеждались в том, что было бы несправедливо ограничиться рассказом об открытиях Урана, Нептуна и Плутона, не упомянув об открытии ряда других членов Солнечной системы. Разве открытия спутников Юпитера, Сатурна и других больших планет, ...обнаружение кольца астероидов не украшают историю астрономии? Наконец, вопрос о том, существуют ли другие, пока неизвестные небесные объекты, имеющие право называться членами нашей планетной системы, тоже не мог быть нами забыт...»

Такое предисловие предпослали авторы книги «Поиски и открытия планет»*). Они поставили себе задачей популярно рассказать широкому кругу читателей о событиях, связанных с открытием в XIX и XX веках неизвестных ранее планет Солнечной системы, раскрыв при этом роль событий, показав их значимость для развития наших представлений о строении Солнечной системы. Читатель этой книги узнает не только об эволюции научных представлений о строении Солнечной системы, но и о ведущей роли, которую при этом играла небесная механика, о выдающемся вкладе, внесенном в ее развитие трудами основных действующих лиц в истории открытия Нептуна — Адамсом и Леверье. Читатель, интересующийся чисто математическими проблемами работ Адамса и Леверье, не оставит без внимания приложения, в которых авторы дают в обработанном виде вычисления Адамса и Леверье, приведшие в конце концов к открытию Нептуна. Он познакомится и с тем, какой по истине гигантский труд был проделан Ловеллом и Томбо — соавторами открытия десятой планеты Солнечной системы — Плутона.

Можно смело сказать, что подавляющее число читателей, начав читать «Поиски и открытия планет», не оставят книгу, пока не прочтут ее до конца. И не только потому, что сама история открытия новых планет захватывающе интересна. Важное значение книги заключается как раз в том, что она заставляет читателя задумываться об очень многом: о путях и логике развития науки, о роли в научном исследовании субъективных и объективных факторов, о том, как человеческие взаимоотношения сказываются на судьбах открытий и ученых, и о многом другом.

Эта книга рассчитана на самый широкий круг читателей (начиная со школьников старших классов), на всех тех, кто интересуется историей науки вообще и историей астрономии в частности.

Б. Гельфгат

*) Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. Поиски и открытия планет. М., «Наука», 1975.

Новые книги

В этом номере мы помещаем аннотации на книги по математике и физике, выходящие в IV квартале 1976 года, представляющие интерес для наших читателей.

Математика

Издательство «Наука»

1. Башмаков М. И. *Уравнения и неравенства* (Библиотечка физико-математической школы). Издание 2-е, перераб. Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.

Круг рассматриваемых в книге вопросов намеренно ограничен — в ней разбираются почти исключительно алгебраические уравнения и неравенства и довольно мало места отводится интересным и важным задачам на доказательство неравенств. Сложной теории здесь нет, большая часть книжки состоит просто из примеров. С другой стороны, хотя вещи, рассматриваемые в книжке, в общем-то самые привычные, иногда привычки приходится ломать и создавать новые.

Книжка носит ярко выраженный «технический» характер. В ней много задач, требующих только хорошего владения школьным материалом, близки к конкурсным задачам при поступлении в институт. Примеры, показываемые в тексте, требуют внимательного разбора с карандашом в руке.

Заканчивается книжка «Краткими итогами»; в них собраны основные понятия и даются десять полезных «Советов».

Книга рассчитана на школьников 9—10 классов, учителей и лиц, самостоятельно занимающихся математикой.

2. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. *Прямые и кривые* (Библиотечка физико-математической школы). Издание 2-е, перераб. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 16 к.

Книга содержит около двухсот задач по элементарной геометрии. Задачи разбиты на несколько циклов, которые включают как традиционные темы: задачи на отыскание геометрических мест (множеств точек), задачи на замечательные точки в треугольнике, задачи на построение, так и довольно трудные задачи на максимум и минимум, в том числе на условный экстремум, олимпиадные задачи. В книге немало поучительных задач, в которых требуется провести небольшие исследования.

Читатель познакомится с использованием в геометрии метода координат и теоретико-множественного языка (понятий пересечения и объединения множеств), преобразований, семейств линий уровня функций на плоскости, кинематики. В сжатой форме рассказывается об эллипсах, гиперболах, параболах, о некоторых кривых, возникающих при движении фигур, и о свойствах касательных к этим кривым. В приложении к книге дается сводка основных формул метода координат.

Книга будет полезна ученикам 8—10 классов, учителям, руководителям математических кружков.

3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра* (Библиотека математического кружка). Издание 5-е, перераб. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 93 к.

Этот сборник задач — I выпуск серии «Библиотека математического кружка», изданный впервые в 1950 году — составлен по материалам одного из старейших кружков — кружка при Московском университете им. М. В. Ломоносова. В отличие от большинства задачников, предназначенных для школьников, он не ставит своей целью углубить или закрепить знания читателя, полученные им в школе. Цель сборника — познакомить читателя с рядом новых для него методов и идей и привить вкус к самостоятельному математическому творчеству. Поэтому в сборнике почти нет задач, для решения которых достаточно только формального знания школьного курса математики. Мало также и наиболее привычных для учащихся типов задач «на сообразительность»: на искусственные методы решения уравнений и систем уравнений, на построение. Зато сборник содержит много задач с нестандартными формулировками, требующих для своего решения новых подходов.

Наибольшее внимание уделено тем разделам элементарной математики, которые находят продолжение в современных научных исследованиях. Некоторые циклы задач в переработанном и приспособленном для школьников виде излагают вопросы, которые обычно относят к «высшей математике» (элементы теории чисел и теории вероятностей, разностные уравнения и т. д.). Отдельные задачи взяты из сочинений классиков математики и из статей, напечатанных в серьезных математических журналах.

Хотя настоящий сборник и может показаться трудным читателю, привыкшему к стандартным задачам, мы уверены, что большинство задач доступны для настойчивого школьника.

Издательство «Просвещение»

4. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. *Международные математические олимпиады*. Издание 4-е, перераб. и дополн. Объем 15 л., тираж 150 000 экз., цена 55 к.

Основным содержанием книги являются тексты задач (с решениями или указаниями) международных математических олимпиад. Помимо этого, в книге приведены наиболее интересные задачи, присланные в жюри международных олимпиад, но не включенные в материалы соревнований, а также некоторые задачи, предлагавшиеся на национальных олимпиадах стран-участниц (Англии, Швеции, Югославии, Венгрии, Румынии, ГДР, Болгарии, Чехословакии, Польши, Советского Союза). Пятое издание книги дополнено материалами последних пяти олимпиад — с XII по XVI.

Книга, безусловно, доставит удовольствие всем учащимся старших классов, любящим решать трудные задачи, и будет полезна руководителям математических кружков.

5. Лаптев Б. Л. *Лобачевский и его геометрия*. Объем 5 л., тираж 80 000 экз., цена 15 к.

В этой брошюре рассказывается о жизни великого русского ученого Лобачевского и дается доступное изложение его геометрических идей. В конце приводится обзор дальнейшего развития неевклидовой геометрии и современных применений геометрии Лобачевского в математике и физике.

Книга адресована учащимся 8—10 классов.

Физика

Издательство «Наука»

1. Капица П. Л. *Эксперимент, теория, практика*. Издание 2-е. Объем 25 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 07 к,

Эта книга представляет собой сборник статей и выступлений академика П. Л. Капицы. В чрезвычайно живой и остроумной форме Капица рассказывает о своих встречах и совместных работах с выдающимися физиками нашего времени.

Ряд статей обращен непосредственно к молодежи.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

2. Маковецкий П. В. *Смотри в корень!* Издание 3-е, испр. и дополн. Объем 18 л., тираж 380 000 экз., цена 69 к.

В книге собраны оригинальные задачи по физике и смежным с ней областям науки (космонавтике, астрономии и т. д.).

Парадоксальность задач зачастую подчеркивается их юмористическим освещением и шуточными эпиграфами (взятыми из афоризмов Козьмы Пруткова).

Книга предназначена для школьников старших классов и с успехом может быть использована в работе физических кружков.

Издательство «Мир»

3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. Перевод с англ. Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики. Вып. 11. Пространство, время, движение. Издание 2-е. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 94 к.

Курс физики известного американского физика-теоретика Ричарда Фейнмана завоевал широкое международное признание. Первое издание этого курса в 9 выпусках вышло в Советском Союзе семь лет назад в этом же издательстве. Настоящее издание выйдет в течение 1976—1978 гг.

Простота изложения, прекрасный и ясный язык, отсутствие громоздких математических выкладок делают эти книги доступными для школьников старших классов.

4. Эрден-Груз Т. *Основы строения материи*. Перевод с венг. Объем 25 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 46. к.

В популярной форме автор рассматривает вопросы строения вещества: общие положения физики микромира; строение атома, атомного ядра, молекулы; природу химических связей; структуру кристаллических и некристаллических тел. Автор подробно останавливается на вопросах практического использования результатов исследований в области микромира.

Атомиздат

5. Арцимович Л. А. *Что каждый физик должен знать о плазме*. Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 30 к.

Эта книга рассчитана на любознательного читателя, желающего получить новейшую информацию о современной области науки — физике плазмы.

Сначала плазма интересовала физиков как своеобразный проводник электрического тока, а также как источник света. Сейчас ее уже рассматривают как естественное состояние вещества, нагретого до очень высокой температуры, и как динамическую систему — объект приложения электромагнитных сил.

Книгу с интересом прочтут все, кто интересуется современной физикой.

6. Старз Дж. *Молекулы жизни*. Перевод с англ. Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 30 к.

В книге в живой и доступной форме излагаются элементарные понятия биохимии и описываются «молекулы жизни», т. е. те молекулы, которые принимают участие в жизненных процессах.

Книга представляет несомненный интерес для широкого круга читателей.

И. Клумова, М. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи



1. Поп и Балда играют на «щелбаны» в следующую игру. Они, не показывая друг другу, пишут каждый последовательность из 1976 знаков «плюс» или «минус». После этого выписывают знаки по кругу: первый знак из набора Попа, первый знак из набора Балды, второй знак из набора Попа, второй знак из набора Балды и так далее. Балда дает Попу столько щелбанов, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Как должен играть Поп, чтобы в наихудшем для себя случае получить поменьше щелбанов?



2. Ученики двух седьмых классов купили 737 учебников. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было семиклассников и сколько учебников закупил каждый из них?

3. На рисунке вы видите два примера на умножение. В каждом примере каждой букве соответствует своя цифра. Какая?



4. Девять чисел a, b, c, d, e, f, g, h, k отличны от нуля. Докажите, что среди чисел aek, dhc, bfg, $-gec$, $-ahf$, $-bdk$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

5. Представьте себе, что в воронку насыпаны мелкие металлические опилки, которые свободно вытекают из «носика» воронки. В опилки воткнута металлическая проволочка, другой конец которой намотан на стеклянную палочку. Что будет происходить с опилками, если палочку натирать куском шерстяной материи? Чтобы убедиться в правильности своего «предсказания», попробуйте воспроизвести этот несложный опыт.

ФИГУРЫ КОНГРУЭНТНЫ... ФИГУРЫ НЕКОНГРУЭНТНЫ?

Е. Семёнов

Степа изобретает

Смотрите, — убеждал своих друзей шестиклассник Степа Мошкин, — я придумал новое отображение плоскости на себя! При этом отображении точка O отображается на себя: $O \to O$ — как при повороте. Всякая другая точка A отображается на такую точку A_1, что A_1 принадлежит лучу $[OA)$ и $|OA_1| = 2\,|OA|$ *). Теперь возьмем на прямой p точки A, B, K, D и построим их образы A_1, B_1, K_1, D_1 (рис. 1). Вы видите, все они лежат на одной прямой p_1, т. е. прямая p отображается на прямую p_1. Прямая AC отображается на прямую A_1C_1, т. е. на себя, и угол AOB отображается на себя. Но самое удивительное не в этом. Все расстояния в придуманном мною отображении удваиваются! Например, $|A_1B_1| = 2\,|AB|$, $|A_1C_1| = 2\,|AC|$, $|OD_1| = 2\,|OD|$ и т. д. Следовательно, прямая p отобразилась на прямую p_1 так, что все расстояния увеличились в два раза! Из курса геометрии 6 класса мы помним, что *конгруэнтными фигурами называются такие, которые отображаются одна на другую с сохранением расстояний*. При отобра-

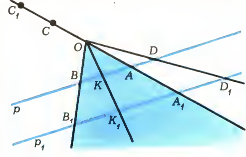


Рис. 1.

*) Придуманное Степой отображение изучается в третьей четверти седьмого класса и носит название «гомотетия». Степа Мошкин об этом не знал.

жении фигуры p на фигуру p_1 расстояния не сохранились Следовательно, прямая p не конгруэнтна прямой p_1! И даже прямая AC не конгруэнтна сама себе, ведь она отобразилась на себя так, что расстояния не сохранились: $|A_1C_1| = 2|AC|$! Аналогично и угол AOB не конгруэнтен сам себе. Так что, — твердо произнес Степа, — прямая может быть не конгруэнтна сама себе; существуют прямые, не конгруэнтные друг другу!

— Это не так! — выкрикнул Геша. — Всякие две прямые конгруэнтны! Всякая фигура конгруэнтна сама себе!

— Почему это? — возразил Степа. — Существуют же неконгруэнтные треугольники, неконгруэнтные параллелограммы, неконгруэнтные окружности! Почему бы не существовать и неконгруэнтным прямым?

Кто же прав в этом споре?

Вечный путаник Степа Мошкин

Вы уже выяснили, кто прав? Ну конечно же, Степа повторяет старые ошибки — определение конгруэнтных фигур он заменил, не сознавая этого, другим. Ведь в учебнике сказано: *«если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что расстояние между любыми двумя точками фигуры Ф равно расстоянию между соответствующими им точками фигуры $Ф_1$, то говорят, что фигура Ф конгруэнтна фигуре $Ф_1$»*. Иначе это можно сказать так: *если существует отображение одной фигуры на другую, при котором расстояния сохраняются, то эти фигуры называются конгруэнтными*.

А Степа решил, что *конгруэнтными фигурами называются такие, которые отображаются друг на друга т о л ь к о с сохранением расстояний*! Если же существует отображение одной фигуры на другую, не сохраняющее расстояния, то такие фигуры, считает Степа, неконгруэнтны. Правда, слово «только» Степой не было произнесено, но оно им подразумевалось как само собой разумеющееся.

Своим примером Степа показал, что существует отображение фигуры на конгруэнтную ей фигуру, не сохраняющее расстояния. А Геше надо было указать другое отображение прямой p на прямую p_1, сохраняющее расстояния, скажем, центральную симметрию с центром в середине отрезка AA_1, или осевую симметрию с осью, проходящей через середины отрезков AA_1 и BB_1, или параллельный перенос, при котором точка A отображается в точку A_1. Конечно, и угол AOB конгруэнтен сам себе, — достаточно указать тождественное отображение или осевую симметрию с осью, являющейся биссектрисой угла AOB.

Что же определил Степа?

Степина ошибка ставит интересный вопрос: а существуют ли случаи, в которых и по школьному определению конгруэнтности, и по Степиному получится один и тот же результат? Другими словами, существуют ли фигуры, которые могут быть отображены одна на другую только с сохранением расстояний?

Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с простейших случаев. Фигура — это множество точек. Простейшей фигурой является фигура, состоящая из одной точки. Пусть $F_1 = \{A\}$, $F_2 = \{B\}$, где A и B — точки. Ясно, что существует единственное отображение фигуры F_1 на фигуру F_2, оно точку A отображает на точку B:

$$A \to B.$$

Поскольку фигуры F_1 и F_2 содержат по одной точке, то можно говорить лишь о расстоянии от точки A до точки A и от точки B до точки B. Но $|AA| = |BB| = 0$, поэтому все отображения F_1 на F_2 сохраняют расстояния.

Пусть теперь $F_1 = \{A, B\}$, $F_2 = \{C, D\}$, где A, B, C, D — точки

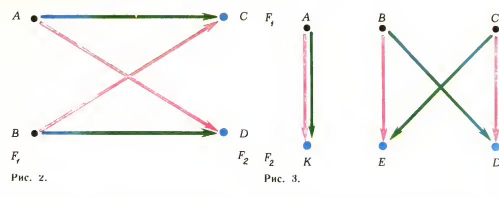


Рис. 2.

Рис. 3.

и $|AB| = |CD|$. Фигуру F_1 можно отобразить на *) фигуру F_2 только двумя способами (рис. 2):

1) $A \to C$, $B \to D$;

2) $A \to D$, $B \to C$.

Поскольку $|AB| = |CD| = |DC|$, то оба эти отображения сохраняют расстояния. Поэтому фигура F_1 может быть отображена на фигуру F_2 только с сохранением расстояний (т. е. эти фигуры конгруэнтны и по определению учебника, и по Степиному определению).

Таким образом, фигуры, отображающиеся друг на друга только с сохранением расстояний, существуют.

Возьмем теперь две фигуры F_1 и F_2, каждая из которых состоит из трех точек, принадлежащих одной прямой (рис. 3), причем $|AC| = |KD| = 5$ *см*, $|BC| = |ED| = 3$ *см*, $|AB| = |KE| = 2$ *см*. Эти фигуры конгруэнтны друг другу, так как отображение

$A \to K, B \to E, C \to D$

сохраняет расстояния. Отобразим теперь F_1 на F_2 так:

$A \to K$, $B \to D$, $C \to E$.

При этом отображении точки A и B отобразились на точки K и D, но $|AB| \neq |KD|$, т. е. расстояние не сохранилось. Следовательно, фигуру F_1, можно отобразить на фигуру F_2 и без сохранения расстояний, т. е. «по Степе» F_1 и F_2 не конгруэнтны.

Теперь посмотрим, какие фигуры «по Степе» конгруэнтны сами себе. Пусть фигура F состоит из двух точек: $F = \{A, B\}$. Эту фигуру можно отобразить на себя только двумя способами:

1) $A \to A$, $B \to B$;

2) $A \to B$, $B \to A$.

При обоих отображениях расстояния сохраняются: $|AB| = |AB| = |BA|$. Таким образом, при всяком отображении данной фигуры F на себя расстояния сохраняются.

Пусть теперь $F_1 = \{A, B, C\}$ — фигура из трех точек, изображенная на рисунке 3. Отобразим ее на себя так:

$A \to A$, $B \to C$, $C \to B$.

Поскольку $|AC| \neq |AB|$, это отображение не сохраняет расстояний, и по Степиному определению эта фигура сама себе не конгруэнтна.

Чтобы полностью ответить на вопрос «что же определил Степа», ре-

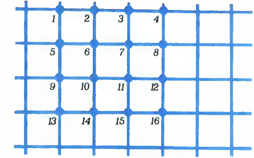


Рис. 4.

*) Подчеркнем: *отобразить на* (а не *в*), т.е. отображение предполагается *обратимым*.

шите следующие задачи: Вам может показаться, что при решении некоторых из них достаточно сослаться на «очевидность», но такая «ссылка» не будет решением этих задач. Нужно привести логические рассуждения, опирающиеся на определение конгруэнтных фигур, скажем, доказать, что для указанных в задачах фигур не существует отображения, переводящего одну из них в другую и сохраняющего расстояния.

Задачи

1. Найдите все фигуры F_1 и F_2, каждая из которых состоит из трех точек и которые можно отобразить друг на друга только с сохранением расстояиий.

2. Найдите все фигуры, состоящие из трех точек, которые отображаются на себя только с сохранением расстояний.

3. Можно ли отобразить на себя множество всех вершин квадрата так, чтобы ни одно из расстояний между различными точками не сохранилось?

4. а) Докажите, что для любых двух конгруэнтных фигур на плоскости, состоящих более чем из трёх точек, найдется отображение одной из них на другую, не сохраняющее расстояния.

б) Докажите, что для любой фигуры на плоскости, состоящей более чем из трёх точек, найдется отображение ее на себя, не сохраняющее расстояния.

5. На рисунке 4 изображен кусок листа бумаги в клетку. Цифрами 1, 2, 3 и т. д. обозначены точки пересечения прямых сетки. Конгруэнтны ли фигуры F_1 и F_2, если

а) $F_1=\{5;\ 7;\ 3\}$; $F_2=\{7;\ 15;\ 16\}$;

б) $F_1=\{10;\ 7;\ 4\}$; $F_2=\{2;\ 7;\ 12\}$;

в) $F_1=\{1;\ 2;\ 6;\ 5\}$; $F_2=\{7;\ 8;\ 12;\ 11\}$;

г) $F_1=\{6;\ 7;\ 11;\ 10\}$, $F_2=\{1;\ 4;\ 16;\ 13\}$;

д) $F_1=\{1;\ 6\}$, $F_2=\{4;\ 7\}$;

е) $F_1=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $F_2=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

В каких случаях F_1 можно отобразить на F_2 без сохранения хотя бы одного расстояния?

6. Найдите на рисунке 4 фигуру F_2, если $F_1 \cong F_2$ и

а) $F_1=\{5;\ 9;\ 12\}$, $15\in F_2$, $3\in F_2$;

б) $F_1=\{1;\ 2;\ 5;\ 6;\ 7\}$, $10\in F_2$, $11\in F_2$, $12\in F_2$;

в) $F_1=\{10;\ 7;\ 12;\ 15;\ 11\}$, $6\in F_2$, $7\in F_2$.

7. Докажите, что неконгруэнтны

а) фигуры $F_1=\{5;\ 1;\ 2\}$ и $F_2=\{6;\ 3;\ 8\}$ (рис. 4);

б) граница квадрата и окружность;

в) фигура, состоящая из трех различных точек, и фигура, состоящая из четырех различных точек;

г) прямая и фигура, представляющая собой объединение двух лучей с общим началом, не являющихся противоположными;

д) треугольник со сторонами 3, 4, 5 *см* и треугольник со сторонами 6, 7, 8 *см*.

Как устроено атомное ядро

(*Начало см. с. 30, 42, 55*)

Европа может рассматриваться как ядро, состоящее из ряда протонов (которые обладают неодинаковыми размерами и зарядами) и из нескольких нейтронов (без заряда и малой массы). Все они удерживаются на своих местах с помощью колоссальной силы, которая не дает им разлететься и называется географией. Ядро это несимметрично, поскольку содержит на западной своей окраине весьма мощный протон (имеется в виду Великобритания), который обладает «волновыми характеристиками», присущими только ему. На юге располагается нечто такое, что может быть названо нейтрино (Италия). Можно предположить, что частица эта также подчиняется законам квантовой механики. Характерно в этом отношении, что центральная ее часть (Рим) — вечная, тогда как об остальной территории этого нельзя сказать.

Затруднения начинаются с рассмотрения электронов, которые обращаются по орбитам, далеким от ядра. В данном случае роль электронов играют колонии. Они принадлежат, если можно так выразиться, отдельным протонам. Но некоторое время тому назад ядро подвергло их ужасной бомбардировке, что заставило некоторые электроны перераспределиться между протонами. Один весьма влиятельный протон, на математическом языке обычно выражаемый свастикой, стал вести себя в этом отношении весьма и весьма неспокойно, что грозит нарушить устойчивое состояние ядра. Можно, однако, надеяться, что если западный протон увеличит свой заряд (имеется в виду — осуществит перевооружение), то, хотя напряженное состояние между протонами сохранится, ядро в целом станет более устойчивым.

Я полагаю, что осветил эту чрезвычайно сложную ситуацию в достаточной мере и пользуясь терминами, вполне доступными физикам. Я мог бы сказать еще словно и в отношении всемирного закона тяготения Ньютона, поскольку о нем упоминал профессор Андраде. Но я чувствую, сэр, что Вы придерживаетесь собственной точки зрения на этот счет, а мне не хотелось бы трогать то, что для Вас свято.»



К статье «Графическое задание функции»

1. $X = [-1; 4]$; $Y = [-1; 2]$; $f(1{,}5) = 2$ — наибольшее значение, $f(-1) = -1$ — наименьшее значение; функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической; функция f положительна в промежутках $]1; 2[$ и $]3{,}5; 4]$, отрицательна в промежутках $[-1; 1[$ и $]2; 3{,}5[$, обращается в нуль при $x=1$, $x=2$, $x=3{,}5$; функция f возрастает в промежутках $[0; 1{,}5]$ и $[2{,}5; 4]$, убывает в промежутке $[1{,}5; 2{,}5]$, постоянна в промежутке $[-1; 0]$.

К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева»

Вариант 1

1. $\sqrt[3]{\dfrac{4r^3 + h^3 \mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

2. $x < -1$; $3/4 < x < 1$.

3. $x = k\pi/7$, k — целое, не кратное 7. Указание. Домножить обе части уравнения на $\sin 2x$, проверив, что корни уравнения $\sin 2x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

Вариант 2

1. $lh(\sqrt{l^2 + 12h^2} - l)/12$.

2. $x_{1,2} = \log_{4+\sqrt{15}}(31 \pm \sqrt{15}) = \pm 2$.

3. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \pi/2$,

$x_3 = (-1)^{k+1} \arcsin(3\sqrt{2}/5) + k\pi$ (k — целое).

Физика

1. $t = 2$ *сек*; $v = 25$ *м/сек*
2. $F_н = 0{,}6$ *н*.
3. $k = 0{,}2$.
4. $v = 10{,}5$ *м/сек* ≈ 38 *км/час*.
5. $t = 23$ С.
6. $v = 400$ *м/сек*.
7. $R = 3$ *м*.
8. $A = 48 \cdot 10^{-7}$ *дж*.
9. $q = 24$ *к*; $A = 288$ *дж*.
10. $\mathscr{E} = 1{,}1$ *в*.
11. $\mathscr{E}_{инд} = 1{,}26$ *в*.
12. $\Delta l = 0{,}3$ *м*.
13. $F = 0{,}2$ *м*; $D = 5$ *дптр*
14. $\lambda = 0{,}5$ *мкм*.
15. $E = 2$ *эв*.

К статье «Фигуры конгруэнтны... фигуры неконгруэнтны?»

1. F_1 и F_2 — множества вершин двух конгруэнтных равносторонних треугольников.

2. Множество вершин равностороннего треугольника.

3. Нет. Указание. Для вершин квадрата есть шесть расстояний: 4 — по сторонам, 2 — по диагоналям, первые четыре равны друг другу.

4. Указание. Если при любом отображении расстояния сохраняются, то все расстояния между различными точками равны друг другу.

5. а) Да; при отображении $5 \to 7$, $7 \to 15$, $3 \to 16$ расстояния сохраняются.

б) Да; при отображении $10 \to 2$, $7 \to 7$, $4 \to 12$ расстояния сохраняются.

в) Да; при отображении $1 \to 11$, $5 \to 12$, $6 \to 8$, $2 \to 7$ расстояния сохраняются.

г) Нет, так как отображения фигуры F_1 на фигуру F_2, сохраняющего расстояния, в этом случае не существует. Например, на какие бы точки второй фигуры мы ни отображали точки 6 и 7, расстояние между их образами будет больше расстояния $|67|$.

д) Да.

е) Да; всякая фигура может быть отображена на себя с помощью тождественного отображения. В данном случае можно отобразить F_1 на F_2 с сохранением расстояний и так: $1 \to 4$, $4 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 2$ (проверьте сохранение расстояний и при этом отображении).

6. а) $F_2 = \{15, 3, 14\}$ или $F_2 = \{15, 3, 16\}$, или $F_2 = \{15, 3, 2\}$, или $F_2 = \{15, 3, 4\}$.

б) $F_2 = \{10, 11, 12, 7, 6\}$ или $F_2 = \{10, 11, 12, 8, 7\}$, или $F_2 = \{10, 11, 12, 15, 14\}$, или $F_2 = \{10, 11, 12, 15, 16\}$.

в) $F_2 = \{6, 7, 5, 2, 10\}$ или $F_2 = \{6, 7, 8, 11, 3\}$.

7. а) На какие бы точки фигуры F_2 мы ни отображали точки 1 и 5, расстояние $|15|$ не сохраняется.

б) Допустим, что граница квадрата отображена на окружность с сохранением расстояний. Наиболее удаленные друг от друга точки границы квадрата — противоположные вершины квадрата. Наиболее удаленные точки окружности — диаметрально противоположные. Следовательно, длина $2r$ диаметра окружности должна быть равна длине диагонали квадрата. Но на границе квадрата существуют только две пары точек, находящихся друг от друга на расстоянии $2r$, они отобразятся на две пары диаметрально противоположных точек окружности, а на окружности существует бесконечное множество пар диаметрально противоположных точек. На границе квадрата таких пар больше нет, т. е. на другие диаметрально противоположные точки окружности никакая пара точек границы квадрата отобразиться не может. Значит, отобразить границу квадрата на ок-

ружность, сохраняя при этом расстояния, невозможно.

в) Поскольку вторая фигура имеет на одну точку больше, чем первая, то отображения первой фигуры на вторую не существует вообще.

г) Указание. Для любых трех точек, являющихся вершинами треугольника, справедливо неравенство $|AB| + |BC| > |AC|$.

д) Наибольшее расстояние между точками первого треугольника — 5 *см*, между точками второго треугольника — 8 *см*. Следовательно, в первой фигуре нет точек, которые могли бы быть отображены на точки второй фигуры, находящиеся друг от друга на расстоянии 8 *см*, то есть сохраняющего расстояния отображения первой фигуры на вторую нет.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(*см. «Квант» № 10*)

1. Поскольку мастер Седов не черноволосый (он отвечает черноволосому) и не седой, то он рыжий; кандидат в мастера не рыжий и не черноволосый, стало быть — седой.

2. 5 команд; 2 очка. Указание. В чемпионате могли участвовать до 7 команд (иначе первый призер набрал бы более 7 очков); сумма очков, набранных вместе n командами в чемпионате, равна $n(n-1)$.

3. 6084=78·78. Указание. Рассмотрите последние цифры квадратов чисел и воспользуйтесь признаками делимости на 9 и на 3.

4. Для горения необходим приток кислорода. В обычных земных условиях приток кислорода происходит за счет конвекции — вблизи пламени нагретый более легкий воздух и продукты сгорания поднимаются вверх, и на их место притекает более холодный воздух, содержащий кислород. В состоянии невесомости конвекции нет, и пламя гаснет из-за отсутствия кислорода.

К заметке «Лингвистика + математика»
(*см. «Квант» № 10, с. 55*)

1. 1. Хороший друг красивых сыновей.
2. Красивый сын хорошего друга.
3. Хорошие сыновья красивых друзей.

2. Слова *e* и *i* служебные. Слово *e* имеет 3 значения: 1) показатель именного сказуемого; 2) показатель деятеля при пассиве; 3) показатель будущего времени глагола. Слово *i* имеет 2 значения: 1) показатель прошедшего времени глагола; 2) показатель прямого дополнения. Размытые фразы:

1. Это — сильная кошка.
2. Конечно же собака не будет есть бананы.

10. Aore teie uri i hohoni i te mau moa.
11. E tamaa te taata i te maia.
12. Eita teie matie e ai hia e te mau puaa.



Рис. 1.

К задачам
(*см. с. 21*)

1. Сколь угодно далеко (см. рис. 1 разными цветами показаны траектории концов отрезка).

2. а) $x=5$, $y=1$, $z=2$; б) $x_1=4$, $y_1=9$, $z_1=1$, $u_1=3$; $x_2=5$, $y_2=8$, $z_2=3$, $u_2=2$; в) $x=3$, $y=4$; г) $x=7$, $y=2$, $z=9$.

3. а) Воспользоваться неравенством $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1$. б) Воспользоваться выпуклостью функции $y=\log_a x (0<a<1)$.

К задаче «Испорченный квадрат»
(*См. «Квант» № 10, 3 с. обл.*)
См. рис. 2.

К статье «XXV Олимпиада по физике в Польше»

(*См. «Квант» № 10*)

Теоретические задачи

1. Правильные ответы: 1е; 2а; 3+; 4б; 5 — да; 6 — нет; 7в.

2. При $x \leqslant a$ $C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_1+\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\right)$; $F=0$.

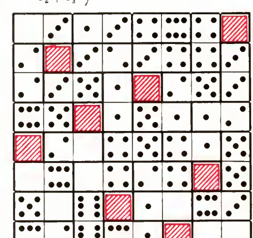


Рис. 2.

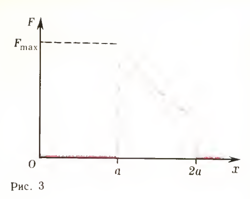


Рис. 3

При $a < x < 2a$

$$C = \frac{(2a - x)\, a\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3}{d\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} + \frac{[(x - a)\,\varepsilon_1 + a\varepsilon_2]\,\varepsilon_0\varepsilon_3 xa}{d\,[\varepsilon_3 x + \varepsilon_1 (x - a) + \varepsilon_2 a]};$$

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_3^2 a^3 U^2}{2d(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{(\alpha x + a\beta)^2}, \quad \text{где } \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \text{ и } \beta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

График $F(x)$ представлен на рисунке 3. $F_{max} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ *н*. Если конденсатор отключить от источника, то сила уменьшится на величину $\Delta F = \frac{2FC}{U}$.

3. $T_З = \sqrt[4]{\frac{s}{4\sigma}} \approx 278°К$; $T_С = \sqrt[4]{\frac{4s}{\sigma\alpha^2}} \approx 5760°К$.

4. а) $r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$; б) $R_1 = R_2 = \frac{3}{2}\frac{r}{\sqrt[3]{4}}$, $R = \frac{3}{2}\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$.

5. $\alpha_{кр} \approx 26°\ 26'$; $\alpha_ф \approx 25°\ 27'$.

(Окончание. Начало см. нас. 43)

Л. Лознер (Минск) **3, 4**; *С. Люксютов* (Киев) **3—5, 9**; *А. Малягин* (Смоленск) **9**; *В. Мартынов* (Волгоград) **4**; *В. Мельник* (Каменец-Подольский) **9**; *Ю. Мельниченко* (Байрам-Али) **7**; *П. Мидодишвили* (Цхинвали) **3, 0**; *О. Мирзабасов* (Черновцы) **4**; *И. Морозов* (Горький) **3—7**; *А. Морозовский* (Киев) **3, 4, 9**; *Ю. Мурзакаев* (Североморск) **9, 2**; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) **7**; *Ю. Мухарский* (Киев) **3—2**; *Ю. Мухин* (Улан-Удэ) **4, 9**; *Н. Никифоров* (Великие Луки) **9, 2**; *В. Николайчик* (Старые Дороги) **3—5, 2**; *Б. Нимбуев* (Улан-Удэ) **3**; *А. Обезноз* (Макеевка Донецкой обл.) **5**; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) **3—5, 0**; *К. Оспанов* (Байрам-Али) **9**; *А. Охримчук* (Выкса) **3, 5, 7, 9**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **9, 0, 2**; *О. Певзнер* (Днепропетровск) **3**; *И. Пелецкий* (Москва) **3**; *Н. Писецкий* (Запорожье) **4**; *В. Плахотный* (Краснодар) **9**; *П. Побылица* (Ленинград) **3**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **4**; *С. Пономарев* (Пермь) **5**; *В. Потемкин* (Великие Луки) **3—5**; *С. Пряхин* (Долгопрудный) **9**; *В. Рубель* (Ставрополь) **3**; *А. Рудерман* (Ленинград) **3, 4, 7**; *С. Самиляк* (Бар) **3, 7**; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) **3, 5, 7**; *В. Семак* (Кишинев) **3**; *А. Сенкевич* (Ош) **2**; *Ю. Скопинцев* (Львов) **7**; *Ю. Скрынников* (Рустави) **3**; *В. Смирнов* (Уфа) **4**; *Ю. Смирнов* (Ленинград) **3, 4**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **3**; *В. Сорокин* (Днепропетровск) **3, 2**; *С. Соскин* (Киев) **3, 5, 0, 2**; *В. Стовба* (Москва) **9**; *С. Субботин* (Алма-Ата) **2**; *М. Суслов* (Москва) **3—5, 7**; *А. Тараненко* (Горловка) **9**; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) **3, 5**; *Ю. Тищенко* (Люберцы) **5**; *Г. Трейдерис* (Вильнюс) **5**; *К. Третьяченко* (Киев) **3—6**; *К. Трутнев* (Казань) **3, 5, 7**; *А. Фарбер* (Тамбов) **4**; *Н. Федин* (Омск) **3—5, 7**; *А. Художин* (Харьков) **2**; *Ю. Целуоти* (Старая Русса) **3**; *И. Церкис* (Калининград) **3**; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) **3**; *Ф. Шарипов* (Сатка) **7, 9, 2**; *С. Шаташвили* (Тбилиси) **3**; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) **3—5**; *А. Шульга* (Полтава) **3, 7**; *С. Шуралев* (Минск) **9, 2**; *Е. Яненко* (Киев) **3—6**.

Номер оформили: *Ю. Ващенко, Е. Верентинова, С. Верховский, М. Дубах, Г. Красиков, Л. Полинская, Э. Назаров*

Корректор *В. Сорокина*

113035. Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21/VIII-76 г.
Подписано в печать 4/X-76 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,39 Т-15168
Цена 30 коп. Заказ. 1858 Тираж 313 675 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются



РАЗНОЦВЕТНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

На рисунке вы видите развертку двенадцати кубиков, раскрашенных в 6 цветов: красный, желтый, зеленый, синий, белый и черный. Склейте по этим разверткам кубики, а затем сложите из них прямоугольный параллелепипед 2×2×3 так, чтобы на каждой его боковой грани размером 2×3 присутствовали все шесть цветов. При этом кубики должны соприкасаться одинаково окрашенными гранями.

Л. Мочалов

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Замысловатый узор на обложке журнала соткан из четырех одинаковых кривых с общим началом, расположенным в центре. Эти кривые нарисованы с помощью вычислительной машины. Начало одной кривой мы воспроизвели здесь. Правило, по которому построена эта кривая, довольно просто: *начиная с отрезка AB_1 длины d* (на первой странице обложки $d = 1$ мм) последовательно проделывается такая процедура: *уже построенная часть линии AB_k поворачивается относительно точки B_k на 90° по часовой стрелке.*

Так получается новый кусок линии B_kB_{k+1}; затем прямой угол с вершиной B_k скругляется — заменяется дугой окружности диаметра d (Точки $A, B_1, B_2, \ldots$, на рисунке отмечены красным цветом.) Построенная так кривая — ее изобрели канадские математики Кнут и Дэвис — называется «Кривой Дракона». Она обладает целым рядом удивительных свойств: она никогда не пересекает сама себя, а четыре кривые, выпущенные из одной точки, при неограниченном продолжении заполнят всю плоскость равномерным узором. О некоторых свойствах этой кривой рассказано в «Кванте» № 2 за 1970 год.